



**DISTANCE LEARNING PROGRAMME**  
(Academic Session : 2023 - 2024)

JEE(Main)

TEST # 03

06-08-2023

## JEE(MAIN) : LEADER TEST SERIES / JOINT PACKAGE COURSE

Time : 3 Hours

12<sup>th</sup> Undergoing/Pass Students

Maximum Marks : 300

### Test Type : Unit Test #03

READ THE INSTRUCTIONS CAREFULLY/ कृपया इन निर्देशों को ध्यान से पढ़ें

#### Important Instructions :

- Immediately fill in the form number on this page of the Test Booklet with Blue/Black Ball Point Pen. Use of pencil is strictly prohibited.
- The candidates should not write their Form Number anywhere else (except in the specified space) on the Test Booklet/Answer Sheet.
- The Test Booklet consists of 90 questions.
- There are **three** parts in the question paper 1,2,3 consisting of **Physics, Chemistry and Mathematics** having **30 questions** in each subject and each subject having **Two sections**.
  - Section-I contains 20 **multiple choice** questions with **only one correct** option.  
**Marking scheme** : +4 for correct answer, 0 if not attempted and -1 in all other cases.
  - Section-II contains 10 **Numerical Value Type** questions. Attempt any 5 questions. First 5 attempted questions will be considered for marking.  
**Marking scheme** : +4 for correct answer, 0 if not attempted and -1 in all other cases.
- Use **Blue/Black Ball Point Pen only** for writing particulars/markings responses on **Side-1 and Side-2** of the Answer Sheet. **Use of pencil is strictly prohibited**.
- No candidate is allowed to carry any textual material, printed or written, bits of papers, mobile phone any electronic device etc, except the Identity Card inside the examination hall/room.
- Rough work is to be done on the space provided for this purpose in the Test Booklet only.
- On completion of the test, the candidate must hand over the Answer Sheet to the invigilator on duty in the Room/Hall. **However, the candidate are allowed to take away this Test Booklet with them.**
- Do not fold or make any stray marks on the Answer Sheet.**
- Take  $g = 10 \text{ m/s}^2$  unless otherwise stated.**

#### महत्वपूर्ण निर्देश :

- परीक्षा पुस्तिका के इस पृष्ठ पर आवश्यक विवरण नीले/काले बॉल पाइंट पेन से तत्काल भरें। पेन्सिल का प्रयोग बिल्कुल वर्जित है।
- परीक्षार्थी अपना फार्म नं. (निर्धारित जगह के अतिरिक्त) परीक्षा पुस्तिका/उत्तर पत्र पर कहीं और न लिखें।
- इस परीक्षा पुस्तिका में 90 प्रश्न हैं।
- इस परीक्षा पुस्तिका में तीन भाग 1, 2, 3 हैं, जिसके प्रत्येक भाग में **भौतिक विज्ञान, रसायन विज्ञान एवं गणित** के 30 प्रश्न हैं और प्रत्येक विषय में 2 खण्ड है।
  - खण्ड-I में 20 **बहुविकल्पीय** प्रश्न हैं। जिनके केवल एक विकल्प सही है।  
**अंक योजना** : +4 सही उत्तर के लिए, 0 प्रयास नहीं करने पर तथा -1 अन्य सभी अवस्थाओं में।
  - खण्ड-II में 10 **संख्यात्मक मान प्रकार के प्रश्न** हैं। किन्हीं 5 प्रश्नों का उत्तर दीजिए। किये गये प्रश्नों में से केवल प्रथम पाँच प्रश्नों को ही अंक दिये जायेंगे।  
**अंक योजना** : +4 सही उत्तर के लिए, 0 प्रयास नहीं करने पर तथा -1 अन्य सभी अवस्थाओं में।
- उत्तर पत्र के पृष्ठ-1 एवं पृष्ठ-2 पर वांछित विवरण एवं उत्तर अंकित करने हेतु केवल नीले/काले बॉल पाइंट पेन का ही प्रयोग करें। पेन्सिल का प्रयोग सर्वथा वर्जित है।
- परीक्षार्थी द्वारा परीक्षा कक्ष/हॉल में परिचय पत्र के अलावा किसी भी प्रकार की पाठ्य सामग्री मुद्रित या हस्तलिखित कागज की पर्चियों, मोबाइल फोन या किसी भी प्रकार के इलेक्ट्रॉनिक उपकरणों या किसी अन्य प्रकार की सामग्री को ले जाने या उपयोग करने की अनुमति नहीं है।
- रफ कार्य परीक्षा पुस्तिका में केवल निर्धारित जगह पर ही कीजिये।
- परीक्षा समाप्त होने पर, परीक्षार्थी कक्ष/हॉल छोड़ने से पूर्व उत्तर पत्र कक्ष निरीक्षक को अवश्य सौंप दें। परीक्षार्थी अपने साथ इस परीक्षा पुस्तिका को ले जा सकते हैं।
- उत्तर पत्र को न मोड़ें एवं न ही उस पर अन्य निशान लगाएँ।
- $g = 10 \text{ m/s}^2$  प्रयुक्त करें, जब तक कि अन्य कोई मान नहीं दिया गया हो।

Name of the Candidate (in Capitals) \_\_\_\_\_

परीक्षार्थी का नाम (बड़े अक्षरों में) : \_\_\_\_\_

Form Number : in figures \_\_\_\_\_

फॉर्म नम्बर : अंकों में \_\_\_\_\_

: in words \_\_\_\_\_

: शब्दों में \_\_\_\_\_

Centre of Examination (in Capitals) : \_\_\_\_\_

परीक्षा केन्द्र (बड़े अक्षरों में) : \_\_\_\_\_

Candidate's Signature : \_\_\_\_\_ Invigilator's Signature : \_\_\_\_\_

परीक्षार्थी के हस्ताक्षर : \_\_\_\_\_

निरीक्षक के हस्ताक्षर : \_\_\_\_\_

## Your Target is to secure Good Rank in JEE(Main) 2024

ALLEN CAREER INSTITUTE Pvt. Ltd.

Registered &amp; Corporate Office : 'SANKALP', CP-6, Indra Vihar, Kota (Rajasthan) INDIA-324005

Ph. : +91-744-3556677, +91-744-2757575 | E-mail : dlp@allen.ac.in | Website : www.dlp.allen.ac.in, dsat.allen.ac.in

DO NOT BREAK THE SEALS WITHOUT BEING INSTRUCTED TO DO SO BY THE INVIGILATOR/NIRIKSHAK KE ANUDESHON KO BINI MUHUREN NA TOIDE.

PART-1 : PHYSICS

भाग-1 : भौतिक विज्ञान

SECTION-I : (Maximum Marks: 80)

This section contains **20 questions**. Each question has 4 options for correct answer. Multiple-Choice Questions (MCQs) **Only one option is correct**. For each question, marks will be awarded as follows:

Full Marks : +4 If correct answer is selected.

Zero Marks : 0 If none of the option is selected.

Negative Marks : -1 If wrong option is selected.

खण्ड-I : (अधिकतम अंक: 80)

इस खंड में **20 प्रश्न** हैं। प्रत्येक प्रश्न में सही उत्तर के लिए 4 विकल्प हैं। बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQs) **केवल एक विकल्प सही** है। प्रत्येक प्रश्न के लिए, अंक निम्नानुसार दिए जाएंगे:

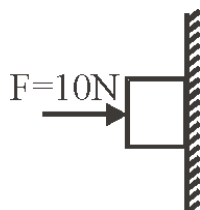
पूर्ण अंक : +4 यदि सही उत्तर चुना गया है।

शून्य अंक : 0 यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है।

ऋणात्मक अंक : -1 यदि गलत विकल्प चुना गया है।

1. A horizontal force of 10N is necessary to just hold a block stationary against a wall. The coefficient of friction between block and wall is 0.2. The weight of block is:-

एक गट्टे को दीवार के सहारे स्थिर रखने के लिए ठीक 10 N का क्षैतिज बल आवश्यक है। दीवार तथा गट्टे के मध्य घर्षण गुणांक 0.2 है तो गट्टे का भार है :-

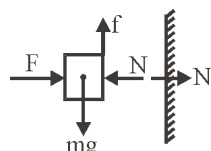


- (A) 20 N  
 (B) 50 N  
 (C) 100 N  
 (D) 2N

Ans. D

Sol.  $f = \mu N$

$$N = F$$



$$f = 0.2 \times 10$$

$$mg = f = 2N$$

2. A 40 kg slab (B) rests on a smooth floor as shown in figure. A 10 kg block (A) rests on the top of the slab. The static coefficient of friction between slab and block is 0.6 while the kinetic friction coefficient is 0.4. The block (A) is acted upon by a horizontal force 100 N. If  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ , the resulting acceleration of the slab (B) will be :-

एक 40 kg की पट्टिका (B) चित्रानुसार चिकनी सतह पर स्थित है। एक 10 kg का ब्लॉक (A) पट्टिका के ऊपर स्थित है। पट्टिका व ब्लॉक के मध्य स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.6 है जबकि गतिक घर्षण गुणांक 0.4 है। ब्लॉक (A) पर क्षैतिज बल 100 न्यूटन लगाया जाता है। यदि  $g = 9.8 \text{ मी/से}^2$  है तो पट्टिका (B) का परिणामी त्वरण होगा :-



- (A)  $0.98 \text{ m/s}^2$                       (B)  $1.47 \text{ m/s}^2$                       (C)  $1.52 \text{ m/s}^2$                       (D)  $6.1 \text{ m/s}^2$

**Ans. A**

**Sol.** For a force of 100N on 10 kg block, relative motion will take place.

∴ The frictional force between 10 kg block and 40 kg block,

$$f = \mu mg = 0.4 \times 100 \times 9.8 \text{ N}$$

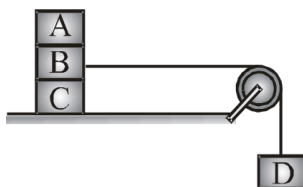
The acceleration of the slab of 40 kg is

$$a = \frac{0.4 \times 100 \times 9.8}{40} = 0.98 \text{ m/s}^2$$

∴ (A) is the correct answer

3. These blocks A, B and C of equal mass  $m$  are placed one over the other on a smooth horizontal ground as shown in figure. Coefficient of friction between any two blocks of A, B and C is  $1/2$ . The maximum value of mass of block D so that the blocks A, B and C move without slipping over each other is :-

चित्र में दर्शाए अनुसार समान द्रव्यमान  $m$  के तीन ब्लॉक A, B व C एक के ऊपर एक चिकनी क्षैतिज सतह पर स्थित है, कोई भी दो ब्लॉक A, B एवं C के मध्य घर्षण गुणांक  $1/2$  है। ब्लॉक D का अधिकतम द्रव्यमान ताकि A, B व C बिना स्लिप हुए गति कर सकें, है :-



- (A)  $6m$                       (B)  $5m$                       (C)  $3m$                       (D)  $4m$

**Ans. C**

**Sol.** Blocks A and C both move due to friction. But less friction is available to A as compared to C because normal reaction between A and B is less. Maximum friction between A and B can be:

$$f_{\max} = \mu m_A g = \left(\frac{1}{2}\right) mg$$

∴ Maximum acceleration of A can be:

$$a_{\max} = \left(\frac{f_{\max}}{2}\right) = \frac{g}{2}$$

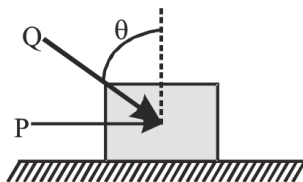
$$\text{further } a_{\max} = \frac{m_D g}{3m + m_D}$$

$$\text{or } \frac{g}{2} = \frac{m_D g}{3m + m_D}$$

∴ (3) is the right answer.

4. A block of mass  $m$  lying on a rough horizontal plane is acted upon by a horizontal force  $P$  and another force  $Q$  inclined at an angle  $\theta$  to the vertical. The block will remain in equilibrium if the coefficient of friction between it and the surface is :-

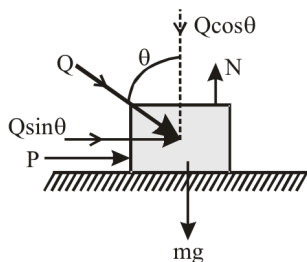
$m$  द्रव्यमान का एक ब्लॉक एक रूँफ क्षैतिज सतह पर रखा हुआ है। इस ब्लॉक पर एक क्षैतिज बल  $P$  और ऊर्ध्वाधर से  $\theta$  कोण बनाता हुआ दूसरा बल  $Q$  चित्रानुसार लग रहे हैं। यह ब्लॉक साम्यावस्था में रहेगा यदि सतह और ब्लॉक के मध्य घर्षण गुणांक निम्न हो :-



- (A)  $\frac{P + Q \sin \theta}{mg + Q \cos \theta}$   
 (B)  $\frac{P \cos \theta + Q}{mg - Q \sin \theta}$   
 (C)  $\frac{P + Q \cos \theta}{mg + Q \sin \theta}$   
 (D)  $\frac{P \sin \theta - Q}{mg - Q \cos \theta}$

Ans. A

Sol.



Applied force

$$f_a = P + Q \sin \theta$$

Normal reaction

$$N = mg + Q \cot \theta$$

$$f_\ell = \mu N = \mu(mg + Q \cos \theta)$$

Now, condition for no slipping

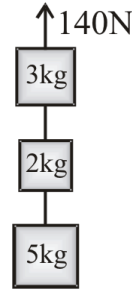
$$f_a \leq f_\ell$$

$$P + Q \sin \theta \leq \mu(mg + Q \cos \theta)$$

$$\mu \geq \frac{P + Q \sin \theta}{mg + Q \cos \theta}$$

5. What will be the acceleration of blocks and tension in the string connecting the blocks 2kg and 5kg for the given figure :-

प्रदर्शित चित्र में ब्लॉकों का त्वरण तथा 2kg तथा 5kg द्रव्यमान के ब्लॉकों को जोड़ने वाली रस्सी में तनाव होगा :-



- (A)  $14 \text{ m/s}^2$ , 120 N  
 (B)  $4 \text{ m/s}^2$ , 70 N  
 (C)  $4 \text{ m/s}^2$ , 30 N  
 (D)  $14 \text{ m/s}^2$ , 140 N

**Ans. B**

**Sol.**  $a = \frac{140 - 100}{10} = 4 \text{ m/s}^2$

Now from II law

$$T - 5g = 5a$$

$$T - 50 = 5 \times 4$$

$$T = 70 \text{ N}$$

6. The total mass of an elevator with a 80 kg man in it is 1000 kg. This elevator moving upward with a speed of 8 m/sec, is brought to rest over a distance of 16m. The tension T in the cables supporting the elevator and the force exerted on the man by the elevator floor will respectively be :-

80 kg द्रव्यमान के एक आदमी के साथ एक लिफ्ट का कुल द्रव्यमान 1000 kg है। 8 m/sec की चाल से ऊपर की ओर चल रही इस लिफ्ट को 16m की दूरी में रोका जाता है। इस लिफ्ट को उठाने वाले तारों में तनाव व लिफ्ट के तल द्वारा मनुष्य पर आरोपित बल क्रमशः होंगे :-

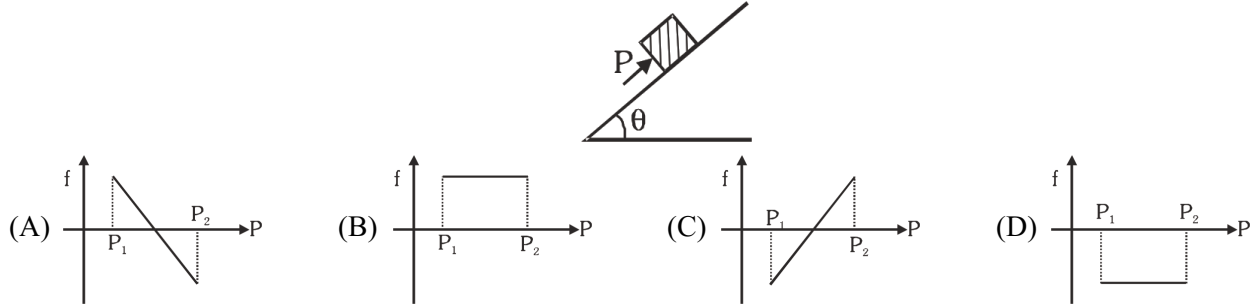
- (A) 7800 N, 624 N  
 (B) 624 N, 7800 N  
 (C) 11800 N, 624 N  
 (D) 624 N, 78 N

**Ans. A**

7. A block of mass  $m$  is on an inclined plane of angle  $\theta$ . The coefficient of friction between the block and the plane is  $\mu$  and  $\tan \theta > \mu$ . The block is held stationary by applying a force  $P$  parallel to the plane. The direction of force pointing up the plane is taken to be positive. As  $P$  is varied from  $P_1 = mg(\sin \theta - \mu \cos \theta)$  to  $P_{13} = mg(\sin \theta + \mu \cos \theta)$ , the frictional force  $f$  versus  $P$  graph will look like

$m$  द्रव्यमान का एक गुटका एक आनत तल पर, जो क्षैतिज से  $\theta$  कोण पर है, रखा है। तल व गुटके के बीच घर्षण गुणांक  $\mu$  है ( $\tan \theta > \mu$ ) गुटके को आनत तल के समानान्तर एक  $P$  बल लगाकर स्थिर अवस्था में रखा गया है। बल की दिशा तल पर ऊपर की ओर धनात्मक ली गई है। जब  $P$  को

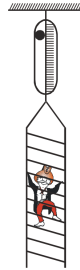
$P_1 = mg(\sin \theta - \mu \cos \theta)$  to  $P_{13} = mg(\sin \theta + \mu \cos \theta)$ , तक परिवर्तित किया जाता है, तब घर्षण बल  $f$  एवं  $P$  का ग्राफ ऐसा दिखेगा :-



Ans. A

8. Figure shows a 5 kg ladder hanging from a string that is connected with a ceiling and is having a spring balance connected in between. A man of mass 25 kg is climbing up the ladder at acceleration  $1 \text{ m/s}^2$ . Assuming the spring balance and the string to be massless, the reading of the spring balance is :-

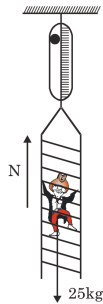
चित्र में छत से जुड़ी रस्सी से लटकी हुई 5 kg की एक सीढ़ी दर्शायी गई है तथा यहाँ एक स्प्रिंग तुला भी जुड़ी हुई है। द्रव्यमान 25 kg वाला एक व्यक्ति सीढ़ी पर  $1 \text{ m/s}^2$  त्वरण से चढ़ रहा है। स्प्रिंग तुला तथा रस्सी को द्रव्यमानहीन मानते हुए स्प्रिंग तुला का पाठ्यांक होगा :-



- (A) 30 kg                      (B) 32.5 kg                      (C) 35 kg                      (D) 37.5 kg

Ans. B

Sol.



$$N - 25g = 25 \times 1$$

$$N = 275$$

$$\therefore W = 275 + 50 = 325 \text{ N}$$

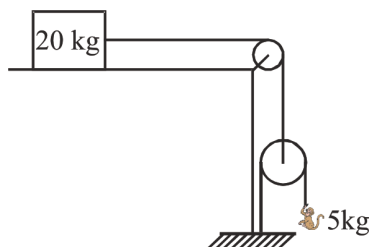
9. A heavy uniform chain lies on a horizontal table top. If the coefficient of friction between the chain and the table surface is 0.25, then the maximum fraction of the length of the chain that can hang over one edge of the table is-

एक क्षैतिज टेबल पर एक समरूप जंजीर रखी है। यदि टेबल व जंजीर के मध्य घर्षण गुणांक 0.25 है तो जंजीर का वह अधिकतम भाग जो कि टेबल से नीचे बिना फिसले लटक सके-

- (A) 20% (B) 25%  
(C) 35% (D) 15%

Ans. A

10. What will be the acceleration of 20 kg blocks. If the monkey climbs up the rope with acceleration of  $2\text{m/s}^2$ . If all surfaces are smooth string and pulley are light.:-



यदि बन्दर  $2\text{ m/s}^2$  के त्वरण से रस्सी पर ऊपर चढ़ता है तो 20 kg के ब्लाक का त्वरण कितना होगा यदि सभी सतह घर्षण रहित है। रस्सी तथा धिरनी द्रव्यमान हीन है।

- (A)  $2\text{ m/s}^2$  (B)  $3\text{ m/s}^2$   
(C)  $4\text{ m/s}^2$  (D) 0

Ans. B

11. A projectile is projected with velocity  $k v_e$  in vertically upward direction from the ground into the space. ( $v_e$  is escape velocity and  $k < 1$ ). If air resistance is considered to be negligible then the maximum height from the centre of earth to which it can go, will be : ( $R =$  radius of earth)

पृथ्वी तल से एक प्रक्षेप्य को आकाश में ऊपर की ओर  $k v_e$  वेग से प्रक्षेपित किया जाता है ( यहाँ  $v_e$  पलायन वेग है, एवं  $k < 1$ )। यदि वायु घर्षण को नगण्य मानें तो प्रक्षेप्य पृथ्वी के केन्द्र से कितनी अधिकतम ऊँचाई तक पहुँचेगा :- ( $R =$  पृथ्वी की त्रिज्या)

- (A)  $\frac{R}{k^2 + 1}$  (B)  $\frac{R}{k^2 - 1}$   
(C)  $\frac{R}{1 - k^2}$  (D)  $\frac{R}{k + 1}$

Ans. C

12. At a given place where acceleration due to gravity is 'g' m/sec<sup>2</sup>, a sphere of lead of density 'd' kg/m<sup>3</sup> is gently released in a column of liquid of density 'ρ' kg/m<sup>3</sup>. If  $d > \rho$ , the sphere will:-

- (A) Fall vertically with an acceleration 'g' m/sec<sup>2</sup>  
 (B) Fall vertically with no acceleration  
 (C) Fall vertically with an acceleration  $g \left( \frac{d - \rho}{d} \right)$   
 (D) Fall vertically with an acceleration  $g \left( \frac{\rho}{d} \right)$

एक स्थान पर गुरुत्वीय त्वरण 'g' मी/से<sup>2</sup> है। यहाँ 'd' किग्रा/मी<sup>3</sup> घनत्व का सीसे का एक गोला ρ किग्रा/मी<sup>3</sup> घनत्व के द्रव स्तम्भ में धीरे से छोड़ दिया जाता है। यदि  $d > \rho$  हो, तो गोला:-

- (A) ऊर्ध्वाधर दिशा में बिना 'g' मी/से<sup>2</sup> के त्वरण से गिरेगा  
 (B) ऊर्ध्वाधर दिशा में बिना त्वरण के गिरेगा  
 (C) ऊर्ध्वाधर दिशा में  $g \left( \frac{d - \rho}{d} \right)$  त्वरण से गिरेगा  
 (D) ऊर्ध्वाधर दिशा में  $g \left( \frac{\rho}{d} \right)$  त्वरण से गिरेगा

**Ans. C**

**Sol.** Apparent weight = actual weight – upthrust force

$$Vdg' = Vdg - Vrg$$

$$\Rightarrow g' = \left( \frac{d - \rho}{d} \right) g$$

13.  $V_e$  and  $V_p$  denote the escape velocities from the earth and another planet having twice the radius and the same mean density as that for the earth. Then :-

एक ग्रह की त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या से दुगुनी और औसत घनत्व, पृथ्वी के घनत्व के बराबर है। यदि  $V_e$  और  $V_p$  क्रमशः पृथ्वी और ग्रह के लिए पलायन वेग के मान हैं तब :-

- (A)  $V_e = V_p$   
 (B)  $V_e = 2 V_p$   
 (C)  $V_e = V_p/2$   
 (D)  $V_e = V_p / \sqrt{2}$

**Ans. C**

14. An asteroid of mass  $m$  is approaching earth initially at a distance of  $10 R_e$  from surface of earth and speed  $V_i$ . It hits the earth with a speed  $V_f$  ( $R_e$  and  $M_e$  are radius and mass of earth), then-

$m$  द्रव्यमान का एक उल्का पिण्ड पृथ्वी की ओर गतिशील है, इसकी पृथ्वी से प्रारम्भिक दूरी  $10 R_e$  तथा प्रारम्भिक वेग  $V_i$  है। यह पृथ्वी से  $V_f$  चाल से टकराता है।

(जहाँ  $R_e$  तथा  $M_e$  पृथ्वी की त्रिज्या तथा द्रव्यमान है), तो -

(A)  $V_f^2 = V_i^2 + \frac{2Gm}{MeR} \left(1 - \frac{1}{10}\right)$       (B)  $V_f^2 = V_i^2 + \frac{2GMe}{Re} \left(1 + \frac{1}{10}\right)$   
 (C)  $V_f^2 = V_i^2 + \frac{2GMe}{Re} \left(1 - \frac{1}{10}\right)$       (D)  $V_f^2 = V_i^2 + \frac{2GM}{Re} \left(1 - \frac{1}{10}\right)$

Ans. C

Sol. From COME

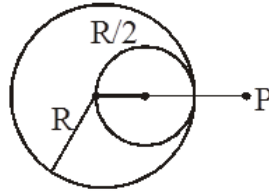
$$\frac{1}{2}m(V_f^2 - V_i^2) = -GM_e m \left(\frac{1}{10R_e} - \frac{1}{R_e}\right)$$

$$\frac{1}{2}m(V_f^2 - V_i^2) = \frac{GMm}{R_e} \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

$$V_f^2 = V_i^2 + \frac{2GM}{R_e} \left(1 - \frac{1}{10}\right)$$

15. A solid sphere of uniform density and radius  $R$  applies a gravitational force of attraction equals to  $F_1$  on a particle placed at  $P$ , distance  $2R$  from the centre.  $O$  of the sphere. A spherical cavity of radius  $R/2$  is now made in a sphere as shown in figure. The sphere with cavity now applies a gravitational force  $F_2$  on the same particle placed at  $P$ . The ratio  $F_2/F_1$  will be -

एक समान घनत्व तथा  $R$  त्रिज्या का एक ठोस गोला इसके केन्द्र से  $2R$  दूरी पर रखे एक कण पर  $F_1$  बल लगाता है। यदि गोले में चित्रानुसार  $R/2$  त्रिज्या की एक गुहिका बना दी जाए तो यह गोला उस कण पर  $F_2$  बल लगाता है तो  $F_2/F_1$  होगा-



- (A)  $1/2$       (B)  $7/9$   
 (C)  $3$       (D)  $9/7$

Ans. B

Sol.  $F_1 = \frac{GMm}{(2R)^2} = \frac{GMm}{4R^2}$

Force applied by remains sphere = force applied by complete sphere – force applied by remain sphere.

$$F_2 = \frac{GMm}{(2R)^2} - \frac{G \times \frac{M}{8} m}{\left(\frac{3R}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{7GMm}{36R^2} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{7}{9}$$

16. The ratio of the radius of a planet 'A' to that of planet 'B' is 'r'. The ratio of acceleration due to gravity on the planets is 'x'. The ratio of the escape velocities from the two planets is :

ग्रह 'A' की त्रिज्या तथा ग्रह 'B' की त्रिज्या का अनुपात 'r' है। इन ग्रहों के गुरुत्वीय त्वरणों का अनुपात 'x' है। दोनों ग्रहों से पलायन वेगों का अनुपात होगा :

- (A)  $xr$  (B)  $\sqrt{\frac{r}{x}}$   
 (C)  $\sqrt{rx}$  (D)  $\sqrt{\frac{x}{r}}$

Ans. C

Sol.  $v_e = \sqrt{2gR} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{g_A}{g_B} \times \frac{R_A}{R_B}} = \sqrt{x \times r}$   
 $\therefore = \frac{v_A}{v_B} \sqrt{rx}$

17. Two bodies of masses  $m_1$  and  $m_2$  are initially at rest at infinite distance apart. They are then allowed to move towards each other under mutual gravitational attraction. Their relative velocity of approach at a separation distance  $r$  between them is:-

$m_1$  तथा  $m_2$  द्रव्यमान के दो पिण्ड प्रारम्भ में अनन्त दूरी पर स्थित हैं। तत्पश्चात् ये दोनों गुरुत्वाकर्षण बल के प्रभाव में एक दूसरे की ओर गति करते हैं। दोनों के बीच  $r$  दूरी होने पर, इनके पास आने का सापेक्ष वेग होगा:-

- (A)  $\left[2G \frac{(m_1 - m_2)}{r}\right]^{1/2}$  (B)  $\left[\frac{2G}{r}(m_1 + m_2)\right]^{1/2}$   
 (C)  $\left[\frac{r}{2G(m_1 m_2)}\right]^{1/2}$  (D)  $\left[\frac{2G}{r} m_1 m_2\right]^{1/2}$

Ans. B

Sol. Let velocities of these masses at  $r$  distance from each other be  $v_1$  and  $v_2$  respectively.

By conservation of momentum

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2 \quad \dots(i)$$

By conservation of energy

change in P.E. = change in K.E.

$$\frac{Gm_1 m_2}{r} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{m_1^2 v_1^2}{m_1} + \frac{m_2^2 v_2^2}{m_2} = \frac{2Gm_1 m_2}{r} \quad \dots(ii)$$

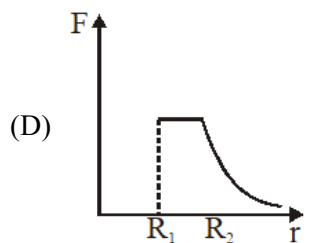
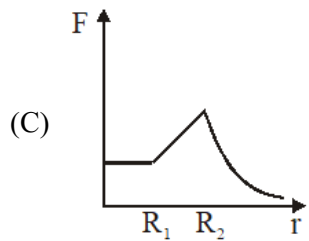
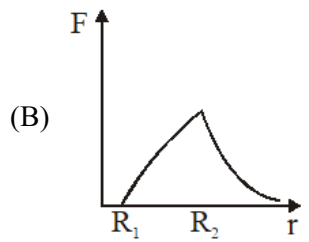
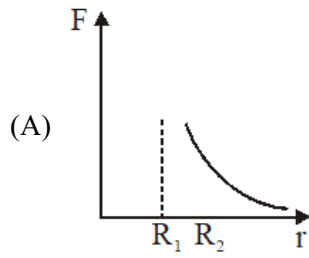
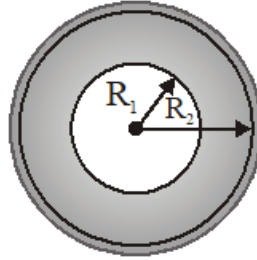
On solving equation (i) and (ii)

$$v_1 = \sqrt{\frac{2Gm_2^2}{r(m_1 + m_2)}} \quad \text{and} \quad v_2 = \sqrt{\frac{2Gm_1^2}{r(m_1 + m_2)}}$$

$$\therefore v_{app} = |v_1| + |v_2| = \sqrt{\frac{2G}{r}(m_1 + m_2)}$$

18. A sphere of mass  $M$  and radius  $R_2$  has a concentric cavity of radius  $R_1$  as shown in figure. The force  $F$  exerted by the sphere on a particle of mass  $m$  located at a distance  $r$  from the centre of sphere varies as ( $0 \leq r \leq \infty$ ):

$M$  द्रव्यमान तथा  $R_2$  त्रिज्या का गोला चित्रानुसार  $R_1$  त्रिज्या के विवर (Cavity) के संकेद्रीय है। गोले द्वारा  $r$  दूरी पर स्थिर  $m$  द्रव्यमान के कण पर लगने वाला बल निम्नानुसार परिवर्तित होगा ( $0 \leq r \leq \infty$ ):



**Ans. B**

**Sol.**  $F = 0, r < R_1$

$F$  increase when

$R_1 \leq r \leq R_2$

$$F = \frac{GM_m}{r^2}, F \propto \frac{1}{r^2}, r > R_2$$

19. If the earth is a point mass of  $6 \times 10^{24}$  kg revolving around the sun at a distance of  $1.5 \times 10^8$  km and in time  $T = 3.14 \times 10^7$  s, then the angular momentum of the earth around the sun is :-

यदि पृथ्वी को  $6 \times 10^{24}$  kg का बिन्दु द्रव्यमान माना जाए, जो कि  $1.5 \times 10^8$  km की दूरी पर स्थित सूर्य के चारों ओर  $T = 3.14 \times 10^7$  s में एक पूर्ण चक्कर लगा रहा है, तो सूर्य के चारों ओर पृथ्वी का कोणीय संवेग होगा :-

- (A)  $1.2 \times 10^{18}$  kgm<sup>2</sup>/s  
 (B)  $1.8 \times 10^{29}$  kgm<sup>2</sup>/s  
 (C)  $1.5 \times 10^{37}$  kgm<sup>2</sup>/s  
 (D)  $2.7 \times 10^{40}$  kgm<sup>2</sup>/s

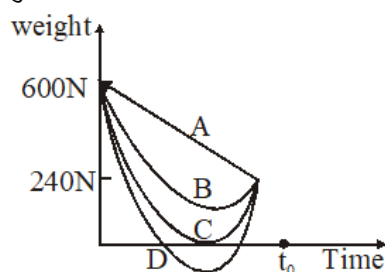
Ans. D

Sol. Angular momentum,  $L = mnr = m\omega r^2 = m \times \frac{2\pi}{T} \times r^2$   

$$= \frac{2 \times 3.14 \times 6 \times 10^{24} \times (1.5 \times 10^{11})^2}{3.14 \times 10^7} = 2.7 \times 10^{40} \text{ kg-m}^2/\text{s}.$$

20. Suppose, the acceleration due to gravity at the earth's surface is  $10 \text{ m/s}^2$  and at the surface of Mars it is  $4.0 \text{ m/s}^2$ . A 60 kg passenger goes from the earth to the mars in a spaceship moving with a constant velocity. Neglect all other objects in the sky. Which part of figure best represents the weight (net gravitational force) of the passenger as a function of time :

माना पृथ्वी की सतह पर गुरुत्वीय त्वरण  $10 \text{ m/s}^2$  तथा मंगल ग्रह पर इसका मान  $4.0 \text{ m/s}^2$  है। 60 किग्रा का एक यात्री एक नियत वेग से गतिशील अंतरिक्ष यान में पृथ्वी से मंगल ग्रह की ओर जाता है। आकाश के अन्य पिण्डों के प्रभाव को नगण्य मानने पर चित्र में प्रदर्शित कौन सा ग्राफ समय  $t$  के साथ यात्री के भार(कुल गुरुत्वाकर्षण बल) को सही ढंग से निरूपित करता है।



- (A) A (B) B  
 (C) C (D) D

Ans. C

Sol. We know that,

$$g \propto \frac{1}{R^2}$$

As the passenger moves away from Earth at some point gravitational force due to earth will be minimized and then start increasing as the passenger moves towards the mars, due to gravitational force offered by mars, and gravitational force can't be negative.

SECTION-II : (Maximum Marks: 20)

This section contains 10 questions Candidates have to attempt any 5 questions out of 10. If more than 5 questions are attempted, then only first 5 attempted questions will be evaluated.

The answer to each question is a Numerical Value.

For each question, enter the correct integer value (In case of non-integer value, the answer should be rounded off to the nearest Integer).

Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks : +4 If correct answer is entered.

Zero Marks : 0 If the question is unanswered.

Negative Marks : -1 If wrong answer is entered.

खण्ड-II : (अधिकतम अंक: 20)

इस खंड में 10 प्रश्न हैं। उम्मीदवारों को 10 में से किसी भी 5 प्रश्न का प्रयास करना है। यदि 5 से अधिक प्रश्नों का प्रयास किया जाता है, तो केवल पहले 5 प्रश्नों का मूल्यांकन किया जाएगा।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान (Numerical Value) है।

प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही पूर्णांक मान दर्ज करें (दशमलव संकेतन में, उत्तर को निकटतम पूर्णांक में लिखा जाना चाहिए।)

प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

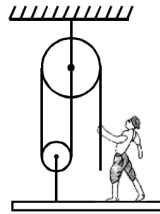
पूर्ण अंक : +4 यदि सही उत्तर दर्ज किया गया है।

शून्य अंक : 0 यदि कोई भी उत्तर दर्ज नहीं किया गया है।

ऋणात्मक अंक : -1 यदि गलत उत्तर दर्ज किया गया है।

1. A man of mass 60 kg is standing on a platform of mass 40 kg as shown in figure then what force man should apply on rope so that he accelerate up with the platform with acceleration of  $2 \text{ m/s}^2$ .

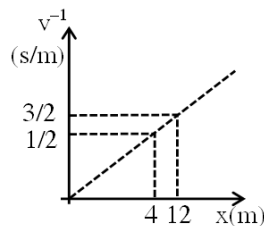
60 kg द्रव्यमान का एक व्यक्ति 40 kg द्रव्यमान के तख्ते पर चित्रानुसार खड़ा है तो व्यक्ति द्वारा रस्सी पर कितना बल लगाया जाना चाहिए जिससे व्यक्ति तथा तख्ता  $2 \text{ m/s}^2$  त्वरण से ऊपर की ओर गति करे।



Ans. 400

2. Graph of  $1/v$  versus  $x$  for a particle under motion is shown as, where  $v$  is velocity and  $x$  is position. The time taken by particle to move from  $x = 4$  to  $x = 12$  m is :-

गति के दौरान  $1/v$  और  $x$  के बीच ग्राफ दिखाया गया है, जहाँ  $v$  वेग है तथा  $x$  स्थिति है। कण के द्वारा  $x = 4$  से  $x = 12$  तक पहुँचने में लगा समय :-



Ans. 8

Sol.

$$\frac{1}{v} - 0 = \frac{\frac{1}{2} - 0}{4 - 0} (x - 0)$$

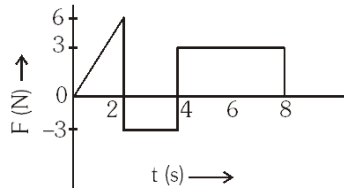
$$\frac{1}{v} = \frac{x}{8} \Rightarrow v = \frac{8}{x} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{8}{x}$$

$$\int_4^{12} x dx = 8 \int_0^t dt$$

$$\left[ \frac{x^2}{2} \right]_4^{12} = 8t \Rightarrow t = 8 \text{ sec}$$

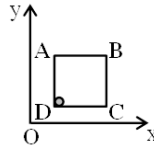
3. The force 'F' acting on a particle of mass 'm' is indicated by the force-time graph shown below. The change in momentum of the particle over the time interval from zero to 8 s is :-

'm' द्रव्यमान के किसी कण पर आरोपित बल 'F' को बल-समय ग्राफ द्वारा दर्शाया गया है। समय  $t = 0$  से  $t = 8$  s तक के अंतराल में कण के संवेग में परिवर्तन होगा :-

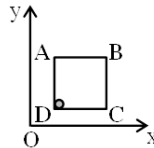


Ans. 12

4. A solid sphere of mass 2 kg is resting inside a cube as shown in the figure. The cube is moving with a velocity  $\vec{v} = (5t\hat{i} + 2t\hat{j})$  m/s. Here t is the time in second. All surface are smooth. The sphere is at rest with respect to the cube. The total force exerted by the sphere on the cube is  $13x$  Newton, then find x ? (Take  $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

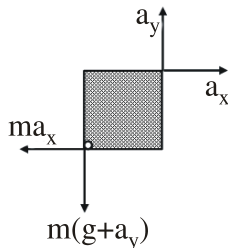


2 किग्रा द्रव्यमान का एक ठोस गोला चित्रानुसार एक घन के अंदर रखा है। घन वेग  $\vec{v} = (5t\hat{i} + 2t\hat{j})$  m/s से गति कर रहा है, जहाँ t (सैकण्ड में) समय है। सभी सतह घर्षण रहित हैं। गोला घन के सापेक्ष विरामावस्था में है। गोले द्वारा घन पर लगाया गया कुल बल  $13x$  न्यूटन है। तब x होगा ? ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



Ans. 2

Sol.



$$\text{As } \vec{v} = 5t\hat{i} + 2t\hat{j}$$

$$\therefore \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = 5\hat{i} + 2\hat{j}$$

$$\vec{F} = ma_x\hat{i} + m(g + a_y)\hat{j}$$

$$\therefore |\vec{F}| = m\sqrt{a_x^2 + (g + a_y)^2} = 26 \text{ N}$$

5. The minimum force required to start pushing a body up a rough (frictional coefficient  $\mu$ ) inclined plane is  $F_1$  while the minimum force needed to prevent it from sliding down is  $F_2$ . If the inclined plane makes an angle  $\theta$  from the horizontal such that  $\tan \theta = 2\mu$  then the ratio  $\frac{F_1}{F_2}$  is:-

एक खुरदरे आनत तल (घर्षण गुणांक  $\mu$ ) पर ऊपर की ओर धक्का देकर एक वस्तु को गतिशील करने में न्यूनतम बल की आवश्यकता  $F_1$  है और इसको नीचे की ओर फिसलने से रोकने के लिये न्यूनतम बल की आवश्यकता  $F_2$  है। यदि आनत तल का क्षैतिज से कोण  $\theta$  इतना है कि  $\tan \theta = 2\mu$  तब अनुपात  $\frac{F_1}{F_2}$  है :-

**Ans. 3**

**Sol.**  $F_1 = mg \sin \theta + \mu mg \cos \theta \times \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{3}{2} mg \sin \theta$   
 $F_2 = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta \times \frac{1}{2} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{2} mg \sin \theta$   
 $\frac{F_1}{F_2} = 3$

6. The mass of planet is  $1/9$  of the mass of the earth and its radius is half that of the earth. If a body weight 9 N on the earth. Its weight on the planet would be :- (in N)

किसी ग्रह का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान के  $1/9$  है तथा इसकी त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की आधी है यदि किसी वस्तु का पृथ्वी पर भार 9 N है तो उसका भार उस ग्रह पर होगा :- (N में)

**Ans. 4**

**Sol.**  $g_p = \frac{GM_p}{R_p^2} \Rightarrow g_p = \frac{4 GM_e}{9 R_e^2}$  ..(1)

$\left[ g = \frac{GM_e}{R_e^2} \right]$  ..(2)

by (1) & (2)

$g_p = \frac{4}{9} g, \quad w_p = mg_p = \frac{4}{9} mg, \quad [mg = 9N]$

$w_p = \frac{4}{9} \times 9N = 4N$

7. Two planets A and B have the same material density. If the radius of A is twice that of B, then the ratio of the escape velocity  $\frac{v_A}{v_B}$  is :-

दो ग्रहों A एवं B का द्रव्यमान घनत्व समान है। यदि ग्रह A की त्रिज्या B की दोगुनी है तो पलायन वेग का अनुपात  $\frac{v_A}{v_B}$  होगा:-

**Ans. 2**

**Sol.**  $v = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{\frac{2G\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{R}}$

$v \propto R$

$\frac{v_A}{v_B} = 2$

8. Two satellites, A and B, have masses  $m$  and  $2m$  respectively. A is in a circular orbit of radius  $R$ , and B is in a circular orbit of radius  $2R$  around the earth. The ratio of their kinetic energies,  $T_A/T_B$ , is:

दो उपग्रह A व B के द्रव्यमान क्रमशः  $m$  तथा  $2m$  है। A पृथ्वी के चारों ओर  $R$  त्रिज्या की वृत्ताकार कक्षा में तथा B,  $2R$  त्रिज्या की वृत्ताकार कक्षा में है। इनकी गतिज ऊर्जाओं का अनुपात  $T_A/T_B$  है :

**Ans. 1**

**Sol.** Orbital velocity  $V = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$

$$T_A = \frac{1}{2} m_A V_A^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} m_B V_B^2$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{m \times \frac{Gm}{R}}{2m \times \frac{Gm}{2R}}$$

$$\Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = 1$$

9. Gravitational force between two masses at a distance  $d$  apart is  $6N$ . If these masses are taken to moon and kept at a same separation, then the force between them will become :-

दो द्रव्यमान जो एक दूसरे से  $d$  दूरी पर स्थित है उनके मध्य लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल  $6N$  है यदि इन दोनों द्रव्यमानों को चन्द्रमा पर ले जाया जाए तथा उनके मध्य की दूरी उतनी ही रहे तो बल होगा :-

**Ans. 6**

**Sol.** Gravitational force between the masses are same.

10. Three equal masses of  $1$  kg each are placed at the vertices of an equilateral triangle PQR and a mass of  $2$  kg is placed at the centroid O of the triangle which is at a distance of  $\sqrt{2}$  m from each of the vertices of the triangle. The force, in newton, acting on the mass of  $2$  kg is :-

$1$  kg (प्रत्येक) के तीन द्रव्यमानों को समबाहु त्रिभुज PQR के शीर्षों पर रखा गया है तथा एक  $2$  kg द्रव्यमान त्रिभुज के केन्द्रक O पर रखा है जिसकी त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष से दूरी  $\sqrt{2}m$  है।  $2$  kg द्रव्यमान पर आरोपित बल (न्यूटन में) होगा :-

**Ans. 0**

PART-2 : CHEMISTRY

भाग-2 : रसायन विज्ञान

SECTION-I : (Maximum Marks: 80)

This section contains 20 questions. Each question has 4 options for correct answer. Multiple-Choice Questions (MCQs) **Only one option is correct.** For each question, marks will be awarded as follows:

Full Marks : +4 If correct answer is selected.

Zero Marks : 0 If none of the option is selected.

Negative Marks : -1 If wrong option is selected.

खण्ड-I : (अधिकतम अंक: 80)

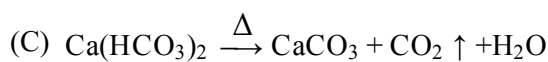
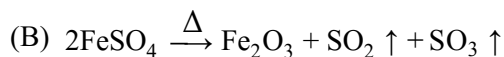
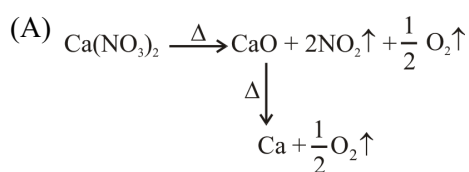
इस खंड में 20 प्रश्न हैं। प्रत्येक प्रश्न में सही उत्तर के लिए 4 विकल्प हैं। बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQs) केवल एक विकल्प सही है। प्रत्येक प्रश्न के लिए, अंक निम्नानुसार दिए जाएंगे:

पूर्ण अंक : +4 यदि सही उत्तर चुना गया है।

शून्य अंक : 0 यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है।

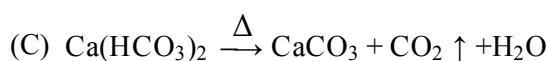
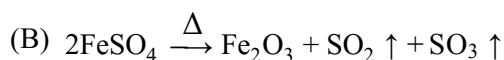
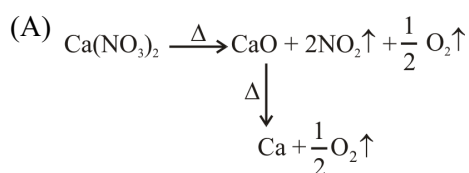
ऋणात्मक अंक : -1 यदि गलत विकल्प चुना गया है।

1. Which of the following process is correct ?



(D) Both (B) and (C)

कौनसी प्रक्रिया सही है ?



(D) (B) तथा (C) दोनों

Ans. D



2. Select wrong statement :-

- (A) A transition metal ion has more polarizing power than S-block ions of comparable size and charge.  
 (B) Order of solubility in water is  $\text{AgF} > \text{AgCl} > \text{AgBr} > \text{AgI}$   
 (C)  $\text{LiCl}$  is soluble in organic solvents  
 (D) The hydration of ions involves absorption of heat

गलत कथन पहचानें :-

- (A) एक संक्रमण धातु आयन की ध्रुवण क्षमता समान आवेश व तुलनात्मक आकार वाले S-खंड आयन से अधिक होती है।  
 (B) जल में विलेयता का क्रम  $\text{AgF} > \text{AgCl} > \text{AgBr} > \text{AgI}$   
 (C)  $\text{LiCl}$  कार्बनिक विलायकों में विलेय है।  
 (D) आयनों के जलयोजन में ऊष्मा का अवशोषण होता है।

**Ans. D**

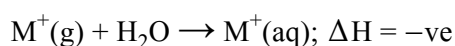
**Sol.** Out of cations having comparable size and charge the one having Noble gas configuration has less polarizing power.

$\text{LiCl}$  is a covalent compound hence, it is soluble in organic solvents.

Order of solubility of heavy metal halides depends on hydration energy.

$(\text{AgF} > \text{AgCl} > \text{AgBr} > \text{AgI})$

The hydration of ions involves evolution of heat.



3. Which is set of paramagnetic molecules or ions?

अनुचुम्बकीय अणुओं या आयनों का सेट कौनसा है?

- (A)  $\text{NO}$ ,  $\text{NO}_2$ ,  $\text{O}_2^{2+}$ ,  $\text{O}_2^{2-}$   
 (B)  $\text{O}_2^+$ ,  $\text{O}_2^-$ ,  $\text{NO}$ ,  $\text{NO}_2$   
 (C)  $\text{C}_2$ ,  $\text{B}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{S}_2$   
 (D)  $\text{B}_2$ ,  $\text{N}_2$ ,  $\text{O}_2$ ,  $\text{O}_2^-$

**Ans. B**

**Sol.** Odd  $e^-$  species always paramagnetic

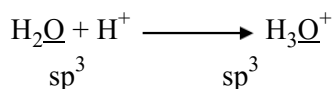
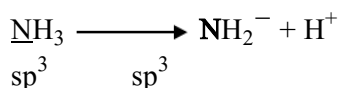
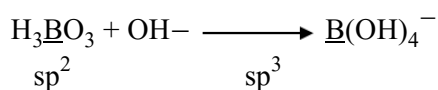
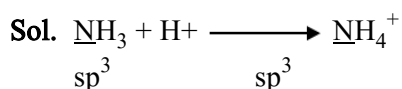
4. The hybridization of the central atom will change when :

- (A)  $\text{NH}_3$  combines with  $\text{H}^+$  (B)  $\text{H}_3\text{BO}_3$  combines with  $\text{OH}^-$   
 (C)  $\text{NH}_3$  forms  $\text{NH}_2^-$  (D)  $\text{H}_2\text{O}$  combines with  $\text{H}^+$

केन्द्रीय परमाणु का संकरण परिवर्तित होता है, जब :

- (A)  $\text{NH}_3$ ,  $\text{H}^+$  से जुड़ता है (B)  $\text{H}_3\text{BO}_3$ ,  $\text{OH}^-$  से जुड़ता है  
 (C)  $\text{NH}_3$ ,  $\text{NH}_2^-$  बनाता है (D)  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{H}^+$  से जुड़ता है

**Ans. B**



5. Which orbitals overlap to form bond in  $\text{OF}_2$  ?

किन कक्षकों के अतिव्यापन से  $\text{OF}_2$  का बंध बनता है ?

- (A)  $\text{sp}^3 - 2\text{p}$   
 (B)  $\text{sp}^2 - 2\text{p}$   
 (C)  $\text{sp} - 2\text{p}$   
 (D)  $\text{p} - \text{p}$

**Ans. A**

**Sol.**  $\text{sp}^3$  hybrid orbital of 'O' overlap with  $2\text{p}$  orbital of 'F'?

6. Which of the following has highest melting point ?

निम्न में से किसका गलनांक सर्वाधिक होगा ?

- (A)  $\text{SF}_6$   
 (B)  $\text{NaCl}$   
 (C)  $\text{SiC}$   
 (D)  $\text{Xe}$

**Ans. C**

**Sol.**  $\text{SiC}$  is a covalent network solid.

7. Which of the following molecular orbital has lowest energy for B<sub>2</sub> molecule?

इनमें से कौन सा आणविक कक्षक B<sub>2</sub> अणु के लिए न्यूनतम ऊर्जा रखता है?

- (A)  $\sigma_{2p_x}$  (B)  $\sigma_{2p_x}^*$  (C)  $\pi_{2p_y}$  (D)  $\pi_{2p_y}^*$

**Ans. C**

**Sol.** Due to s-p mixing,  $\sigma_{2p_x}$  has greater energy than  $\pi_{2p_y}$ .

8. Select incorrect order :-

- (A)  $\text{NO}_3^- > \text{NO}_2^- > \text{NO}_2^+$  (N – O bond length)  
 (B)  $\text{HI} > \text{HF} > \text{HBr} > \text{HCl}$  (order of melting point)  
 (C)  $\text{CH}_4 < \text{CH}_3\text{Cl} < \text{CH}_2\text{Cl}_2 < \text{CHCl}_3$  (order of dipole moment)  
 (D)  $\text{SbH}_3 > \text{NH}_3 > \text{AsH}_3 > \text{PH}_3$  (order of boiling point)

असत्य क्रम पहचानें :-

- (A)  $\text{NO}_3^- > \text{NO}_2^- > \text{NO}_2^+$  (N – O बंध लम्बाई)  
 (B)  $\text{HI} > \text{HF} > \text{HBr} > \text{HCl}$  (गलनांक का क्रम)  
 (C)  $\text{CH}_4 < \text{CH}_3\text{Cl} < \text{CH}_2\text{Cl}_2 < \text{CHCl}_3$  (द्विध्रुव आघूर्ण का क्रम)  
 (D)  $\text{SbH}_3 > \text{NH}_3 > \text{AsH}_3 > \text{PH}_3$  (क्वथनांक का क्रम)

**Ans. C**

**Sol.** The correct order of dipole moment is :



9. Which of the following does not have coordinate bonds ?

किसमें उपसहसंयोजी बंध उपस्थित नहीं है ?

- (A)  $\text{HNO}_2$  (B)  $\text{O}_3$   
 (C)  $\text{NaBF}_4$  (D)  $\text{NH}_4\text{Cl}$

**Ans. A**

**Sol.** Structure of  $\text{HNO}_2$  is  $\text{H} - \ddot{\text{O}} - \ddot{\text{N}} = \ddot{\text{O}}:$

10. An element (X) forms compounds of the formula  $\text{XCl}_3$ ,  $\text{X}_2\text{O}_5$  and  $\text{Ca}_3\text{X}_2$  but does not for  $\text{XCl}_5$ . Predict element (X) :

एक तत्व (X) यौगिक  $\text{XCl}_3$ ,  $\text{X}_2\text{O}_5$  व  $\text{Ca}_3\text{X}_2$  तो बनाता है लेकिन  $\text{XCl}_5$  नहीं बना सकता है। तत्व (X) को पहचाने :

- (A) B (B) Al  
 (C) N (D) P

**Ans. C**

**Sol.** 'N' can form  $\text{NCl}_3$ ,  $\text{N}_2\text{O}_5$  and  $\text{Ca}_3\text{N}_2$  but not  $\text{NCl}_5$ .

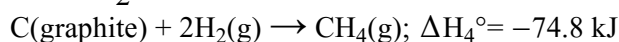
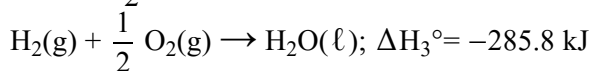
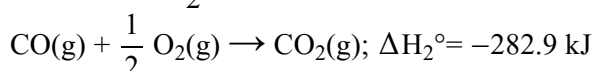
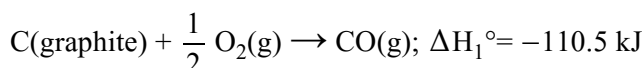
11. Find enthalpy of neutralisation of  $\text{NH}_4\text{OH}$  and  $\text{HCN}$  in aqueous solution if enthalpy of ionisation of  $\text{NH}_4\text{OH}$  and  $\text{HCN}$  are  $7 \text{ kJ/mol}$  and  $8 \text{ kJ/mol}$ . also enthalpy of ionisation of  $\text{H}_2\text{O}$  is  $57.3 \text{ kJ/mole}$ .

जलीय विलयन में  $\text{NH}_4\text{OH}$  तथा  $\text{HCN}$  के उदासिनीकरण की एन्थैल्पी की गणना कीजिये यदि  $\text{NH}_4\text{OH}$  तथा  $\text{HCN}$  की आयनन की एन्थैल्पी  $7 \text{ kJ/mol}$  तथा  $8 \text{ kJ/mol}$  है। साथ में  $\text{H}_2\text{O}$  की आयनन की एन्थैल्पी  $57.3 \text{ kJ/mole}$  है।

- (A)  $-15 \text{ kJ/mol}$  (B)  $-42.3 \text{ kJ/mol}$   
 (C)  $+1 \text{ kJ/mol}$  (D)  $42.3 \text{ kJ/mol}$

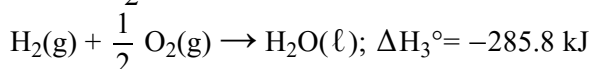
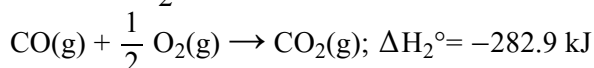
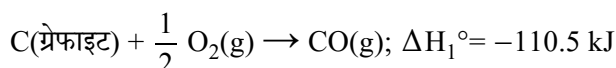
Ans. B

12. Determine  $\Delta U^\circ$  at  $300 \text{ K}$  for the following reaction using the listed enthalpies of reaction :-



- (A)  $-653.5 \text{ kJ}$   
 (B)  $-686.2 \text{ kJ}$   
 (C)  $+747.4 \text{ kJ}$   
 (D) None of these

दिये गये अभिक्रिया एन्थैल्पी मानों के आधार पर निम्नलिखित अभिक्रिया के लिए  $300 \text{ K}$  पर  $\Delta U^\circ$  का मान है :-



- (A)  $-653.5 \text{ kJ}$   
 (B)  $-686.2 \text{ kJ}$   
 (C)  $+747.4 \text{ kJ}$   
 (D) इनमें से कोई नहीं

Ans. D

$$\text{Sol. } \Delta H^\circ = -3\Delta H_1^\circ + \Delta H_2^\circ + 2\Delta H_3^\circ + 3\Delta H_4^\circ = -747.4 \text{ kJ}$$

$$\Delta H^\circ = \Delta U^\circ + \Delta n_g RT; \text{ where } \Delta n_g = -8$$

$$-747.4 = \Delta U^\circ - \frac{8 \times 8.314 \times 300}{1000}$$

$$\Delta U^\circ = -727.44 \text{ kJ}$$

13. Two mole of an ideal gas is heated at constant pressure of one atmosphere from 27°C to 127°C. If  $C_{v,m} = 20 + 10^{-2} T \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ , then  $q$  and  $\Delta U$  for the process are respectively :-

एक आदर्श गैस के दो मोल को स्थिर दाब एक वायुमण्डल पर 27°C से 127°C तक गर्म किया गया। यदि  $C_{v,m} = 20 + 10^{-2} T \text{ जूल K}^{-1} \text{ मोल}^{-1}$  हो तो प्रक्रम के लिए  $q$  व  $\Delta U$  के मान हैं :-

- (A) 6362.8 J, 4700 J  
 (B) 3037.2 J, 4700 J  
 (C) 7062.8 J, 5400 J  
 (D) 3181.4 J, 2350 J

**Ans. A**

**Sol.**  $w = -nR \Delta T = -2 \times 8.314 \times 100$

$$= -1662.8 \text{ J}$$

$$\Delta U = n \int C_{v,m} dT$$

$$= 2 \times \int (20 + 10^{-2}T) dT$$

$$= 2 \times 20 \times (T_2 - T_1) + 2 \times 10^{-2} \times \frac{(T_2^2 - T_1^2)}{2}$$

$$= 4700 \text{ J}$$

$$4700 = \theta - 1662.8$$

$$\therefore \theta = 6362.8 \text{ J}$$

14. For a reversible process at  $T = 300 \text{ K}$ , the volume of 2 mole of ideal gas is increased from 1 litre to 10 litre, the  $\Delta H$  for isothermal change is :-

उत्क्रमणीय प्रक्रम के लिये  $T = 300 \text{ K}$  पर, एक आदर्श गैस के 2 moles का आयतन 1 litre से 10 litre तक बढ़ता है, समतापीय परिवर्तन के लिये  $\Delta H$  का मान है ?

- (A) 11.47 kJ  
 (B) 4.98 kJ  
 (C) 0  
 (D) 114.7 kJ

**Ans. C**

**Sol.** For isothermal process

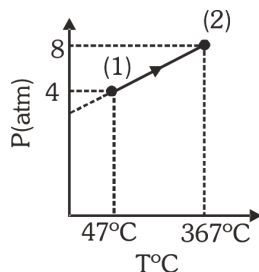
$$\Delta H = 0$$

15. 2 moles of an ideal diatomic gas is subjected to the following process. Mark the correct option(s).

[Given :  $R = 2 \text{ Cal/mol K}$ ]

एक आदर्श द्विपरमाणुक गैस के 2 मोल को निम्न प्रक्रम द्वारा ले जाया जाता है। सत्य विकल्प होगा-

[दिया है :  $R = 2 \text{ Cal/mol K}$ ]



- (A)  $w = 0$   
 (B)  $q = 4480 \text{ Cal}$   
 (C)  $\Delta H = 2240 \text{ Cal}$   
 (D)  $\Delta E = 1600 \text{ Cal}$

**Ans. A**

**Sol.**  $V_1 = \frac{2 \times R \times 320}{4}$

$V_2 = \frac{2 \times R \times 640}{8}$

$\Delta V = 0$

so  $w = 0$

16. 2 mole of an ideal gas at  $27^\circ \text{C}$  temperature is expanded reversibly from 2 lit to 20 lit. Find entropy change ( $R = 2 \text{ cal/mol K}$ ) :-

2 मोल आदर्श गैस  $27^\circ \text{C}$  ताप पर 2 लीटर से 20 लीटर तक उत्क्रमणीय रूप से प्रसारित की जाती है, एन्ट्रॉपी परिवर्तन होगा ( $R = 2 \text{ cal/mol K}$ )

- (A)  $92.1 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$   
 (B)  $0 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$   
 (C)  $4 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$   
 (D)  $9.2 \text{ cal K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

**Ans. D**

**Sol.**  $\Delta S = 2.303 nR \log \frac{V_2}{V_1}$   
 $= 2.303 \times 2 \times 2 \times \log \frac{20}{2} = 9.2 \text{ cal}$

17. In which of the reaction entropy decreases?

- (A)  $C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$   
 (B)  $H_2(g) + I_2(g) \rightarrow 2HI(g)$   
 (C)  $PCl_5(g) \rightarrow PCl_3(g) + Cl_2(g)$   
 (D)  $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$

निम्न में से किस अभिक्रिया में एन्ट्रॉपी घटती है?

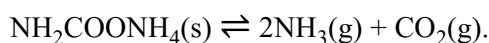
- (A)  $C(s) + O_2(g) \rightarrow CO_2(g)$   
 (B)  $H_2(g) + I_2(g) \rightarrow 2HI(g)$   
 (C)  $PCl_5(g) \rightarrow PCl_3(g) + Cl_2(g)$   
 (D)  $N_2(g) + 3H_2(g) \rightarrow 2NH_3(g)$

**Ans. D**

**Sol.** Number of moles of gaseous product is less than number of moles of gaseous reactant.

∴ Volume decreases do entropy decreases.

18. For the reaction takes place at certain temperature



If equilibrium pressure is 3X bar then  $\Delta_r G^\circ$  would be :-

- (A)  $-RT \ln 4 - 3RT \ln X$   
 (B)  $RT \ln 4 - 3RT \ln X$   
 (C)  $-3RT \ln X$   
 (D) None of these

निश्चित ताप पर हो रही अभिक्रिया

$NH_2COONH_4(s) \rightleftharpoons 2NH_3(g) + CO_2(g)$  के लिए यदि साम्य दाब 3X बार हो तो  $\Delta_r G^\circ$  का मान है :-

- (A)  $-RT \ln 4 - 3RT \ln X$   
 (B)  $RT \ln 4 - 3RT \ln X$   
 (C)  $-3RT \ln X$   
 (D) इनमें से कोई नहीं

**Ans. A**

**Sol.**  $\Delta G^\circ = -RT \ln K_p$ ;  $K_p = (2x)^2 X = 4X^3$

$$\Delta G^\circ = -RT \ln(4X^3)$$

$$\Delta G^\circ = -RT \ln 4 - 3RT \ln X$$

19.  $1/2 A_2 + 3/2 B_2 \rightarrow AB_3$ ,  $\Delta H^\circ = -20 \text{ kJ S}^\circ$  for  $A_2$ ,  $B_2$  and  $AB_3$  are  $60$ ,  $40$  and  $50 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  respectively then calculate the temperature at which equilibrium will be established :-

- (A) 500 K  
 (B) 200 K  
 (C) 1000 K  
 (D) All temp.



$A_2$ ,  $B_2$  तथा  $AB_3$  की  $S^\circ$  क्रमशः  $60$ ,  $40$  तथा  $50 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  है तो किस ताप पर साम्यावस्था होगी :-

- (A) 500 K  
 (B) 200 K  
 (C) 1000 K  
 (D) सभी ताप

**Ans. A**

20. Oxygen gas weighing  $64 \text{ gm}$  is expanded isothermally and reversibly from  $1 \text{ atm}$  to  $0.25 \text{ atm}$  at  $30^\circ\text{C}$ . Calculate entropy change (in  $\text{JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ ), assuming the gas to be ideal.

$30^\circ\text{C}$  पर  $64 \text{ gm}$  ऑक्सीजन गैस  $1 \text{ atm}$  से  $0.25 \text{ atm}$  तक समतापीय एवं उत्क्रमणीय रूप से प्रसारित होती है। गैस को आदर्श मानते

हुये, एन्ट्रॉपी परिवर्तन ( $\Delta S$ ) की गणना  $\text{JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$  के मात्रक में कीजिये।

- (A)  $18 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$   
 (B)  $23 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$   
 (C)  $30 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$   
 (D)  $15 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$

**Ans. B**

**Sol.** 
$$\Delta S = 2.303 nR \log \left( \frac{P_1}{P_2} \right) = 2.303 \times 2 \times 8.314 \log \left( \frac{1}{0.25} \right)$$
  

$$\simeq 23 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

SECTION-II : (Maximum Marks: 20)

This section contains 10 questions Candidates have to attempt any 5 questions out of 10. If more than 5 questions are attempted, then only first 5 attempted questions will be evaluated.

The answer to each question is a Numerical Value.

For each question, enter the correct integer value (In case of non-integer value, the answer should be rounded off to the nearest Integer).

Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks : +4 If correct answer is entered.

Zero Marks : 0 If the question is unanswered.

Negative Marks : -1 If wrong answer is entered.

खण्ड-II : (अधिकतम अंक: 20)

इस खंड में 10 प्रश्न हैं। उम्मीदवारों को 10 में से किसी भी 5 प्रश्न का प्रयास करना है। यदि 5 से अधिक प्रश्नों का प्रयास किया जाता है, तो केवल पहले 5 प्रश्नों का मूल्यांकन किया जाएगा।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान (Numerical Value) है।

प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही पूर्णांक मान दर्ज करें (दशमलव संकेतन में, उत्तर को निकटतम पूर्णांक में लिखा जाना चाहिए।)

प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

पूर्ण अंक : +4 यदि सही उत्तर दर्ज किया गया है।

शून्य अंक : 0 यदि कोई भी उत्तर दर्ज नहीं किया गया है।

ऋणात्मक अंक : -1 यदि गलत उत्तर दर्ज किया गया है।

1. How many of the following will evolve O<sub>2</sub> gas upon heating ?

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| (i) KMnO <sub>4</sub>                 | (ii) Ca(NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>                              |
| (iii) Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> | (iv) K <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>                                 |
| (v) NaNO <sub>3</sub>                 | (vi) (NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> Cr <sub>2</sub> O <sub>7</sub> |
| (vii) NH <sub>4</sub> NO <sub>3</sub> | (viii) CaC <sub>2</sub> O <sub>4</sub>                              |

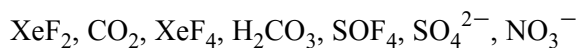
गर्म करने पर इनमें से कितने यौगिक O<sub>2</sub> गैस उत्सर्जित करेंगे ?

- |                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| (i) KMnO <sub>4</sub>                 | (ii) Ca(NO <sub>3</sub> ) <sub>2</sub>                              |
| (iii) Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub> | (iv) K <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>                                 |
| (v) NaNO <sub>3</sub>                 | (vi) (NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> Cr <sub>2</sub> O <sub>7</sub> |
| (vii) NH <sub>4</sub> NO <sub>3</sub> | (viii) CaC <sub>2</sub> O <sub>4</sub>                              |

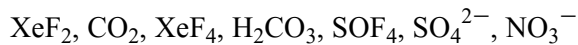
**Ans. 3**

**Sol.** KMnO<sub>4</sub>, Ca(NO<sub>3</sub>)<sub>2</sub> and NaNO<sub>3</sub> will evolve O<sub>2</sub> gas upon heating.

2. In how many of the following species axial d-orbitals participate in hybridization ?



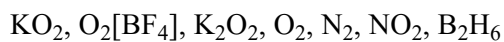
इनमें से कितनी प्रजातियों में अक्षीय d-कक्षक संकरण में हिस्सा लेते हैं ?



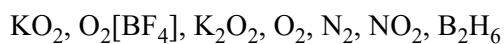
Ans. 3

Sol.	Species	Hybridization
	$\text{XeF}_2, \text{SOF}_4$	$sp^3 d_{z^2}$
	$\text{CO}_2$	$sp$
	$\text{XeF}_4$	$sp^3 d_{z^2} d_{x^2-y^2}$
	$\text{H}_2\text{CO}_3$	$sp^2$
	$\text{SO}_4^{2-}$	$sp^3$
	$\text{NO}_3^-$	$sp^2$

3. How many of the following have one unpaired electron ?



इनमें से कितने यौगिकों में एक अयुग्मित  $e^-$  उपस्थित है?



Ans. 3

Sol.	Species	Number of unpaired $e^-$
	$\text{K}^+\text{O}_2^-$	1
	$\text{O}_2^+[\text{BF}_4]^-$	1
	$2\text{K}^+ \text{O}_2^{2-}$	0
	$\text{O}_2$	2
	$\text{N}_2$	0
	$\text{NO}_2$	1
	$\text{B}_2\text{H}_6$	0

4. How many of the following are valid formulae ?

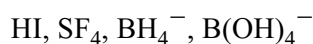


इनमें से कितने मान्य सूत्र हैं ?



**Ans. 4**

**Sol.** Valid Formulas as are :



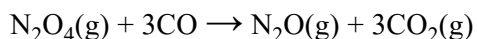
5. In the formation of  $\text{XeF}_5^{\oplus}$  total number of orbitals of Xe involved in Hybridisation is :-

$\text{XeF}_5^{\oplus}$  के निर्माण में Xe के कुल कक्षकों की संख्या जो संकरण में सम्मिलित है :-

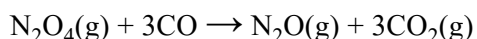
**Ans. 6**

**Sol.**  $\text{XeF}_5^{\oplus}$   $sp^3d^2$

6. Standard enthalpies of formation of  $\text{CO(g)}$ ,  $\text{CO}_2(\text{g})$ ,  $\text{N}_2\text{O(g)}$  and  $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g})$  are  $-110$ ,  $-393$ ,  $-81$  and  $10$  kJ/mole, respectively. Find the  $\Delta_r H^\circ$  for the reaction :



$\text{CO(g)}$ ,  $\text{CO}_2(\text{g})$ ,  $\text{N}_2\text{O(g)}$  तथा  $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g})$  के निर्माण की मानक ऐन्थेल्पियाँ क्रमशः  $-110$ ,  $-393$ ,  $-81$  तथा  $10$  kJ/mole, हैं तो अभिक्रिया के लिये  $\Delta_r H^\circ$  ज्ञात कीजिये।



**Ans. -940**

**Sol.**  $\Delta_r H^\circ = \sum \Delta_f H^\circ (\text{products}) - \sum \Delta_f H^\circ (\text{reactants})$

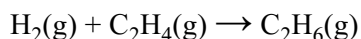
$$\left[ \Delta_f H^\circ_{\text{N}_2\text{O}(\text{g})} + 3 \times \Delta_f H^\circ_{\text{CO}_2(\text{g})} \right] - \left[ \Delta_f H^\circ_{\text{N}_2\text{O}_4(\text{g})} + 3 \times \Delta_f H^\circ_{\text{CO}(\text{g})} \right]$$

$$\Rightarrow (-81 + 3 \times -393) - (10 + 3 \times (-110))$$

$$= -1260 + 320$$

$$= -940$$

7. Calculate enthalpy change for the reaction in Kcal/mol



The bond energies are,

$$\text{H}-\text{H} \Rightarrow 110, \text{C}-\text{H} \Rightarrow 100, \text{C}-\text{C} \Rightarrow 80 \text{ \&}$$

$$\text{C}=\text{C} \Rightarrow 150 \text{ Kcal mol}^{-1}$$

अभिक्रिया  $\text{H}_2(\text{g}) + \text{C}_2\text{H}_4(\text{g}) \rightarrow \text{C}_2\text{H}_6(\text{g})$  के लिये एन्थेल्पी परिवर्तन Kcal/mol में ज्ञात कीजिए।

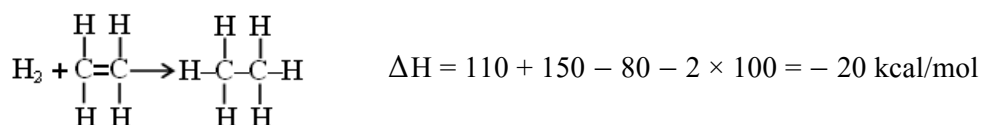
बन्ध ऊर्जाएं है :-

$$\text{H}-\text{H} \Rightarrow 110, \text{C}-\text{H} \Rightarrow 100, \text{C}-\text{C} \Rightarrow 80 \text{ और}$$

$$\text{C}=\text{C} \Rightarrow 150 \text{ Kcal mol}^{-1} \text{ हैं।}$$

**Ans. -20**

**Sol.**



8. What is the final temperature (in kelvin) of 0.10 mole monoatomic ideal gas that performs 75 cal of work adiabatically if the initial temperature is 227°C ? (use  $R = 2 \text{ cal/K-mol}$ )

एक एकल परमाणुक आदर्श गैस के 0.10 मोल का प्रारम्भिक ताप 227°C है। यह रुद्धोष्म प्रक्रम में 75 कैलोरी कार्य करती है। गैस का अन्तिम ताप केल्विन में ज्ञात कीजिए। ( $R = 2 \text{ cal/K-mol}$ )

**Ans. 250**

**Sol.**

$$nC_v(T_2 - T_1) = -75 \text{ cal}$$

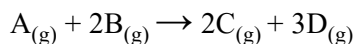
$$0.1 \times \frac{3R}{2}(T_2 - T_1) = -75$$

$$T_2 - T_1 = \frac{-75}{0.3}$$

$$T_2 - 500 = -250$$

$$T_2 = 250 \text{ K.}$$

9. For the reaction,



the value of  $\Delta H$  at  $27^\circ\text{C}$  is 19.0 KCal. Calculate value of  $\Delta U$  for the reaction in Kcal :-

अभिक्रिया  $A_{(g)} + 2B_{(g)} \rightarrow 2C_{(g)} + 3D_{(g)}$  के लिये  $27^\circ\text{C}$  पर  $\Delta H = 19.0$  KCal है। तो इस अभिक्रिया के लिये  $\Delta U$  का मान KCal में ज्ञात कीजिए :-

**Ans. 18**

**Sol.**  $\Delta n_g = 5 - 3 = 2$

$$\Delta H = \Delta U + \Delta n_g RT$$

$$19 = \Delta U + 2 \times (2 \times 10^{-3}) \times 300$$

$$\Delta U = 19 - 1200 \times 10^{-3}$$

$$= 19 - 1.2 = 17.8 \text{ KCal}$$

10. A process  $A \rightarrow B$  is difficult to occur directly instead it takes place in three successive steps.

$$\Delta S (A \rightarrow C) = 50 \text{ e.u.}$$

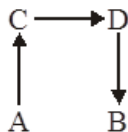
$$\Delta S (C \rightarrow D) = 30 \text{ e.u.}$$

$$\Delta S (B \rightarrow D) = 20 \text{ e.u.}$$

Where e.u. is entropy unit.

Then the entropy change for the process  $\Delta S (A \rightarrow B)$  is :-

एक प्रक्रम  $A \rightarrow B$ , प्रत्यक्ष रूप से सम्पन्न होने के बजाय तीन क्रमागत पदों में सम्पन्न होता है :-



$$\Delta S (A \rightarrow C) = 50 \text{ e.u.}$$

$$\Delta S (C \rightarrow D) = 30 \text{ e.u.}$$

$$\Delta S (B \rightarrow D) = 20 \text{ e.u.}$$

जहाँ e.u. एन्ट्रॉपी इकाई है।

प्रक्रम  $(A \rightarrow B)$  के लिए एन्ट्रॉपी परिवर्तन  $\Delta S$  है।

**Ans. 60**

PART-3 : MATHEMATICS

भाग-3 : गणित

SECTION-I : (Maximum Marks: 80)

This section contains **20 questions**. Each question has 4 options for correct answer. Multiple-Choice Questions (MCQs) **Only one option is correct**. For each question, marks will be awarded as follows:

*Full Marks* : +4 If correct answer is selected.

*Zero Marks* : 0 If none of the option is selected.

*Negative Marks* : -1 If wrong option is selected.

खण्ड-I : (अधिकतम अंक: 80)

इस खंड में **20 प्रश्न** हैं। प्रत्येक प्रश्न में सही उत्तर के लिए 4 विकल्प हैं। बहुविकल्पीय प्रश्न (MCQs) **केवल एक विकल्प सही** है। प्रत्येक प्रश्न के लिए, अंक निम्नानुसार दिए जाएंगे:

*पूर्ण अंक* : +4 यदि सही उत्तर चुना गया है।

*शून्य अंक* : 0 यदि कोई भी विकल्प नहीं चुना गया है।

*ऋणात्मक अंक* : -1 यदि गलत विकल्प चुना गया है।

1. If  $\phi(x) = f(x) + f(2a - x)$  and  $f'(x) > 0, a > 0, 0 \leq x \leq 2a$ , then :-

- (A)  $\phi(x)$  increases in  $(a, 2a)$
- (B)  $\phi(x)$  increases in  $(0, a)$
- (C)  $\phi(x)$  decreases in  $(a, 2a)$
- (D) None

यदि  $\phi(x) = f(x) + f(2a - x)$  तथा  $f'(x) > 0, a > 0, 0 \leq x \leq 2a$ , तो:-

- (A)  $\phi(x)$ ,  $(a, 2a)$  में वर्धमान है
- (B)  $\phi(x)$ ,  $(0, a)$  में वर्धमान है
- (C)  $\phi(x)$ ,  $(a, 2a)$  में ह्रासमान है
- (D) कोई नहीं

**Ans. A**

**Sol.**  $\phi'(x) = f'(x) + f'(2a - x)$

given,  $f'(x) > 0, \Rightarrow f'(x)$  is increasing function, if

$$x < 2a - x \Rightarrow x < a$$

$$f'(x) < f'(2a - x)$$

$$\Rightarrow \phi'(x) < 0$$

$\therefore \phi(x)$  decreases in  $(0, a)$

and if  $x > 2a - x \Rightarrow x > a$

$$f'(x) > f'(2a - x) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$\therefore \phi(x)$  increases in  $(a, 2a)$

2. If  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  and  $a = 0, b = 4$ , then  $c$  the using LMVT is  $2 \pm \lambda$ . Then value of  $450\sqrt{2} \lambda$  must be:-

यदि  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  तथा  $a = 0, b = 4$ , LMVT के प्रयोग से  $c = 2 \pm \lambda$  है, तो  $450\sqrt{2} \lambda$  का मान होगा :-

- (A) 400 (B) 500  
(C) 600 (D) 700

**Ans. C**

**Sol.** We have,  $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$

$$= x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

$$\therefore f(a) = 0 - 0 + 0 - 6 = -6$$

$$\therefore f(b) = 4^3 - 6 \cdot 4^2 + 11 \cdot 4 - 6$$

$$= 64 - 96 + 44 - 6 = 6$$

$$\therefore = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{6 - (-6)}{4 - 0} = 3$$

Also,  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$

$$f'(c) = 3c^2 - 12c + 11$$

From LMVT  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$

$$\Rightarrow 3 = 3c^2 - 12c + 11$$

$$\therefore 3c^2 - 12c + 8 = 0$$

$$\therefore c = \frac{12 \pm \sqrt{(144 - 96)}}{6} = 2 \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

As both of the values of  $c$  lie in the open interval  $(0, 4)$

$$\therefore \lambda = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Then, } 450\sqrt{2} \lambda = 450 \times \sqrt{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 600$$

3. Let  $f(x) = \begin{cases} \sin^{-1} \alpha + x^2, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$

$f(x)$  can have a minimum at  $x = 1$  is the value of  $\alpha$  is :-

$$\text{माना } f(x) = \begin{cases} \sin^{-1} \alpha + x^2, & 0 < x < 1 \\ 2x, & x \geq 1 \end{cases}$$

यदि  $x = 1$  पर  $f(x)$  न्यूनतम है तो  $\alpha$  का मान होगा -

- (A) 1 (B) -1 (C) 0 (D) 2

**Ans. A**

**Sol.**

$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 2, & x \geq 1 \end{cases}$$

minimum at  $x = 1$

$$\therefore f(1) = \sin^{-1} \alpha + 12 \Rightarrow 2 = \sin^{-1} \alpha + 1$$

$$\sin^{-1} \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \sin 1$$

4. The number of points in  $(-\infty, \infty)$ , for which  $x^2 - x \sin x - \cos x = 0$ , is :

अन्तराल  $(-\infty, \infty)$  में उन बिन्दुओं की संख्या, जिसके लिए  $x^2 - x \sin x - \cos x = 0$  है :-

- (A) 6 (B) 4  
(C) 2 (D) 0

**Ans. C**

**Sol.** Let  $f(x) = x^2 - x \sin x - \cos x$

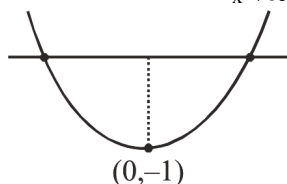
$$\therefore f'(x) = 2x - x \cos x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 - \cos x) = 0 \text{ or } x = 0$$

( $\because 2 - \cos x > 0$  for all real  $x$ )

Also,  $x = 0$  is point of minima.

$$f(0) = -1 < 0 \text{ and } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \rightarrow \infty.$$



Hence, it meets  $x$ -axis at two points and, hence, two solutions.

5. The global maximum value of  $f(x) = \log_{10}(4x^3 - 12x^2 + 11x - 3)$ ,  $x \in [2, 3]$ , is :-

$f(x) = \log_{10}(4x^3 - 12x^2 + 11x - 3)$ ,  $x \in [2, 3]$ , का निरपेक्ष महत्तम मान है :-

- (A)  $-\frac{3}{2} \log_{10} 3$   
(B)  $1 + \log_{10} 3$   
(C)  $\log_{10} 3$   
(D)  $\frac{3}{2} \log_{10} 3$

**Ans. B**

**Sol.** Let  $g(x) = 4x^3 - 12x^2 + 11x - 3$

$$\therefore g'(x) = 12x^2 - 24x + 11$$

$$= 12(x - 1)^2 - 1$$

$$> 0 \text{ for } x \in [2, 3]$$

Thus,  $g(x)$  is increasing in  $[2, 3]$ .

$$f(x)_{\max} = f(3)$$

$$= \log_{10}(4.27 - 12.9 + 11.3 - 3)$$

$$= \log_{10}(30) = 1 + \log_{10} 3$$

6. The height of a right circular cone of maximum volume inscribed in a sphere of diameter  $a$  is—  
 a व्यास के गोले के अन्तर्गत बनने वाले अधिकतम आयतन के लम्ब वृत्तीय शंकु की ऊँचाई है—

- (A)  $(2/3)a$  (B)  $(3/4)a$   
 (C)  $(1/3)a$  (D)  $(1/4)a$

**Ans. A**

**Sol.**  $Vol = \frac{1}{3} \pi r^2 h$   
 $V = \frac{1}{3} \pi \left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right) \left( \frac{a}{2} + x \right)$   
 $V'(x) = \frac{1}{3} \pi \left[ [-2x] \left( \frac{a}{2} + x \right) + \left( \frac{a^2}{4} - x^2 \right) \right]$   
 $V'(x) = \frac{\pi}{3} \left[ -ax - 2x^2 + \frac{a^2}{4} - x^2 \right]$   
 $= -\frac{\pi}{3} \left[ 3x^2 + ax - \frac{a^2}{4} \right] = 0$   
 $x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 3a^2}}{6}$   
 $x = \frac{-a \pm 2a}{6} = -\frac{a}{2}, \frac{a}{6}$   
 $\therefore \text{Height} = \frac{a}{2} + x = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{4a}{6} = \frac{2a}{3}$

7. The tangent to curve  $y_1 = ax^2 + bx + \frac{7}{2}$  at  $(1, 2)$  is parallel to normal at point  $(-2, 2)$  on curve  $y_2 = x^2 + 6x + 10$ , then value of  $(a - 2b)$  is

वक्र  $y_1 = ax^2 + bx + \frac{7}{2}$  के बिन्दु  $(1, 2)$  पर खींची गई स्पर्श रेखा, वक्र  $y_2 = x^2 + 6x + 10$  के बिन्दु  $(-2, 2)$  पर खींचे गये अभिलम्ब के समान्तर है, तो  $(a - 2b)$  का मान होगा

- (A) 4  
 (B) -4  
 (C) 2  
 (D) 6

**Ans. D**

**Sol.**  $(1, 2)$  lies on  $y_1$   
 $2 = a + b + \frac{7}{2} \Rightarrow a + b = -\frac{3}{2} \dots(1)$   
 $\left( \frac{dy_1}{dx} \right)_{(1,2)} = -\frac{1}{\left( \frac{dy_2}{dx} \right)_{(-2,2)}}$   
 $2a + b = -\frac{1}{2}$   
 From (1) & (2)  $a = 1$  &  $b = -\frac{5}{2}$   
 $a - 2b = 6$

8. The length of sub-normal to the curve  $xy^n = a^{n+1}$  is constant then value of n is

यदि वक्र  $xy^n = a^{n+1}$  के किसी बिन्दु पर अधोलम्ब की लम्बाई अचर है, तब n बराबर होगा

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 2

Ans. A

Sol.  $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{nx}$   
L.S.N.

$$= \left| y \cdot \frac{dy}{dx} \right| = \left| y \left( -\frac{y}{nx} \right) \right| = \frac{y^2}{nx} = \frac{y^{2+n}}{n \cdot a^{n+1}}$$

Which is constant

When  $2 + n = 0 \Rightarrow n = -2$

9. The number of critical point(s) of  $f(x) = (x - 1)|x - 2| + (x - 2)|x - 1|$  is :-

- (A) 2 (B) 1 (C) more than 2 (D)  $-\frac{1}{2}$

$f(x) = (x - 1)|x - 2| + (x - 2)|x - 1|$  के क्रान्तिक बिन्दुओं की संख्या होगी :-

- (A) 2 (B) 1 (C) 2 से अधिक (D)  $-\frac{1}{2}$

Ans. C

Sol.  $\because f(x) = 0 \forall x \in (1,2)$   
 $\Rightarrow f'(x) = 0 \forall x \in (1,2)$   
 $\Rightarrow$  infinitely many critical points.

10. If  $f(x) = (|x|)^{|\sin x|}$ , then  $f' \left( -\frac{\pi}{4} \right) =$

यदि  $f(x) = (|x|)^{|\sin x|}$ , तब  $f' \left( -\frac{\pi}{4} \right) =$

- (A)  $\left( \frac{\pi}{4} \right)^{1/\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{4}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)$  (B)  $\left( \frac{\pi}{4} \right)^{1/\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{4}{\pi} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)$   
 (C)  $\left( \frac{\pi}{4} \right)^{1/\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\pi}{4} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)$  (D)  $\left( \frac{\pi}{4} \right)^{1/\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \log \frac{\pi}{4} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)$

Ans. A

Sol.  $f(x) = |x|^{|\sin x|}$   
 $\ln f(x) = |\sin x| \ln |x|$   
 $\frac{1}{f(x)} \times f'(x)$   
 $= \frac{|\sin x|}{|x|} \times \frac{|x|}{x} + \frac{|\sin x|}{\sin x} \times \cos x \ln |x|$   
 $f' \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \left( \frac{\pi}{4} \right)^{1/\sqrt{2}} \left( \frac{1/\sqrt{2}}{-\pi/4} - \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{\pi}{4} \right)$   
 $= \left( \frac{\pi}{4} \right)^{1/\sqrt{2}} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \frac{4}{\pi} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \right)$

11. Let  $f(x) = 3^{\alpha x} + 3^{\beta x}$ , where  $\alpha \neq \beta$  and  $3f'(x)\log_3 e = 2f(x) + f''(x)(\log_3 e)^2$  for all  $x$ . Then the value of  $\alpha + \beta$  is :

माना  $f(x) = 3^{\alpha x} + 3^{\beta x}$  है, जहाँ  $\alpha \neq \beta$  तथा सभी  $x$  के लिये  $3f'(x)\log_3 e = 2f(x) + f''(x)(\log_3 e)^2$  है, तो  $\alpha + \beta$  का मान होगा

- (A) 3  
(B) 2  
(C) -3  
(D) 6

**Ans. A**

**Sol.**  $f(x) = 3^{\alpha x} + 3^{\beta x}$

$$f'(x) = \alpha 3^{\alpha x} \ln 3 + 3^{\beta x} \ln 3$$

$$f''(x) = \alpha^2 3^{\alpha x} (\ln 3)^2 + 3^{\beta x} \beta^2 (\ln 3)^2$$

Put it in given condition and solve

12. If  $y = \tan^{-1} \left( \frac{\log(e/x^2)}{\log(ex^2)} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{3 + 2 \log x}{1 - 6 \log x} \right)$ , then  $\frac{d^2y}{dx^2}$  is

यदि  $y = \tan^{-1} \left( \frac{\log(e/x^2)}{\log(ex^2)} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{3 + 2 \log x}{1 - 6 \log x} \right)$ , तो  $\frac{d^2y}{dx^2}$  बराबर है

- (A) 2  
(B) 1  
(C) 0  
(D) -1

**Ans. C**

**Sol.** We have

$$y = \tan^{-1} \left( \frac{\log e - \log x^2}{\log e + \log x^2} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{3 + 2 \log x}{1 - 6 \log x} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left( \frac{1 - 2 \log x}{1 + 2 \log x} \right) + \tan^{-1} \left( \frac{3 + 2 \log x}{1 - 6 \log x} \right)$$

$$= \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} (2 \log x) + \tan^{-1} 3 + \tan^{-1} (2 \log x)$$

$$= \tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 3$$

$$\text{or } \frac{dy}{dx} = 0 \text{ or } \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

13. Derivative of  $\cot^{-1}\left(\frac{2\sqrt{1+x^2}-5\sqrt{1-x^2}}{5\sqrt{1+x^2}+2\sqrt{1-x^2}}\right)$  with respect to  $\cos^{-1}\sqrt{1-x^4}$  is equal to :-

$$\cot^{-1}\left(\frac{2\sqrt{1+x^2}-5\sqrt{1-x^2}}{5\sqrt{1+x^2}+2\sqrt{1-x^2}}\right) \text{ का } \cos^{-1}\sqrt{1-x^4}$$

के सापेक्ष अवकलज है :-

- (A) 1
- (B) -1
- (C) 1/2
- (D) -1/2

**Ans. D**

**Sol.**

Let given functions be y and z respectively, then

$$\begin{aligned} y &= \cot^{-1}\left(\frac{2\sqrt{1+x^2}-5\sqrt{1-x^2}}{5\sqrt{1+x^2}+2\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{5\sqrt{1+x^2}+2\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1+x^2}-5\sqrt{1-x^2}}\right) \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{5\cos\theta/2+2\sin\theta/2}{2\cos\theta/2-5\sin\theta/2}\right), \text{ where } x^2 = \cos\theta \\ &= \tan^{-1}\left(\frac{5/2+\tan\theta/2}{1-5/2\tan\theta/2}\right) \end{aligned}$$

$$= \tan^{-1}[\tan(\alpha + \theta/2)], \text{ where } \tan\alpha = 5/2$$

$$= \alpha + \theta/2 \quad \dots(1)$$

$$\text{Also } z = \cos^{-1}\sqrt{1-x^4}$$

$$= \cos^{-1}\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$= \cos^{-1}(\sin\theta) = \frac{\pi}{2} - \theta \dots(2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dz} = \frac{dy}{d\theta} \bigg/ \frac{dz}{d\theta} = \frac{1/2}{-1} = -1/2$$

14. If  $y = \sqrt{(x - \sin x) + \sqrt{(x - \sin x) + \sqrt{(x - \sin x) + \dots \infty}}$ ,  
then value of  $\left| \left( \frac{dx}{dy} \right)_{x=\frac{\pi}{2}}^2 - 2\pi \right|$  is :

यदि  $y = \sqrt{(x - \sin x) + \sqrt{(x - \sin x) + \sqrt{(x - \sin x) + \dots \infty}}$   
, हो तो  $\left| \left( \frac{dx}{dy} \right)_{x=\frac{\pi}{2}}^2 - 2\pi \right|$  का मान होगा

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

**Ans. C**

**Sol.**  $y = \sqrt{(x - \sin x) + y}$

$$y^2 = (x - \sin x) + y$$

d.w.r.to x

$$2y \frac{dy}{dx} = 1 - \cos x + \frac{dy}{dx}$$

$$\left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{1 - \cos x}{2y - 1} \quad \dots(1)$$

when  $x = \frac{\pi}{2}, y = y_p$  (Let)

$$x_p^2 = \frac{\pi}{2} - 1 + y_p$$

$$y_p^2 - y_1 + \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right) = 0$$

$$y_p = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \left( 1 - \frac{\pi}{2} \right)}}{2}$$

$$2y_p - 1 = \sqrt{2\pi - 3}$$

from (1)

$$\left( \frac{dx}{dy} \right)_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{2y_p - 1}{1 - 0}$$

$$\left( \frac{dx}{dy} \right)_{x=\frac{\pi}{2}}^2 = 2\pi - 3$$

15. In a triangle  $\tan A + \tan B + \tan C = 6$  and  $\tan A \tan B = 2$ , then the values of  $\tan A$ ,  $\tan B$  and  $\tan C$  are :-

- (A) 1,2,3 (B) 3,2,1  
(C) 1,2,0 (D) None of these

एक त्रिभुज में  $\tan A + \tan B + \tan C = 6$  तथा

$\tan A \tan B = 2$ , तब  $\tan A$ ,  $\tan B$  तथा  $\tan C$  के मान हैं :-

- (A) 1,2,3 (B) 3,2,1  
(C) 1,2,0 (D) इनमें से कोई नहीं

**Ans. A**

**Sol.**  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$

$$\therefore \tan A \tan B \tan C = 6 \Rightarrow \tan C = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{Also } \tan A + \tan B = 6 - 3 = 3$$

$$\tan A, \tan B = 2, 1 \text{ or } 1, 2 \text{ and } \tan C = 3$$

16. The value of

$$\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} \sin \frac{7\pi}{14} \sin \frac{9\pi}{14} \sin \frac{11\pi}{14} \sin \frac{13\pi}{14}$$

is equal to

$$\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} \sin \frac{7\pi}{14} \sin \frac{9\pi}{14} \sin \frac{11\pi}{14} \sin \frac{13\pi}{14}$$

का मान होगा -

- (A)  $\frac{1}{8}$  (B)  $\frac{1}{16}$   
(C)  $\frac{1}{32}$  (D)  $\frac{1}{64}$

**Ans. D**

**Sol.**  $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} \sin \frac{7\pi}{14} \sin \frac{9\pi}{14} \sin \frac{11\pi}{14} \sin \frac{13\pi}{14}$

$$= \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} \times 1$$

$$\times \sin \left( \pi - \frac{5\pi}{14} \right) \sin \left( \pi - \frac{3\pi}{14} \right) \sin \left( \pi - \frac{\pi}{14} \right)$$

$$= \left[ \sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} \right]^2 = \frac{1}{64}$$

17. Let  $a = \cos A + \cos B - \cos (A + B)$

$$b = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \left( \frac{A+B}{2} \right).$$

Then  $a - b$  equal to :-

- (A) 1 (B) 0  
(C) -1 (D) None

माना  $a = \cos A + \cos B - \cos (A + B)$

$$b = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \left( \frac{A+B}{2} \right)$$

तब  $a - b$  बराबर है :-

- (A) 1 (B) 0  
(C) -1 (D) कोई नहीं

**Ans. A**

**Sol.**  $a = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} - 2 \cos^2 \left( \frac{A+B}{2} \right) + 1$

$$a = 1 + 2 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \left[ \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) - \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \right]$$

$$a = 1 + 4 \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$\therefore a - b = 1$$

18. If  $\alpha, \beta, \gamma$  and  $\delta$  are the solutions of the equation  $\tan \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) = 3 \tan 3\theta$ , no two of which have equal tangents, then the value of  $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma + \tan \delta$  is

यदि समीकरण  $\tan \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) = 3 \tan 3\theta$ , के मूल  $\alpha, \beta, \gamma$  व  $\delta$  है इनमें से किन्हीं दो के  $\tan$  का मान समान नहीं है तो  $\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma + \tan \delta =$

- (A) 1 (B) -1  
(C) 2 (D) 0

**Ans. D**

**Sol.** We have,

$$\tan \left( \theta + \frac{\pi}{4} \right) = 3 \tan 3\theta$$

$$\Rightarrow \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} = 3 \cdot \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1+t}{1-t} = 3 \left( \frac{3t-t^3}{1-3t^2} \right) \text{ [putting } t = \tan \theta \text{]}$$

$$\Rightarrow 3t^4 - 6t^2 + 8t - 1 = 0$$

$$\text{So, } t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{0}{3} = 0$$

$$\therefore \tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma + \tan \delta = 0$$

Hence, (D) is the correct answer.

19. If  $\tan^2\left(\frac{\pi}{16}\right) + \tan^2\left(\frac{2\pi}{16}\right) + \tan^2\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \dots + \tan^2\left(\frac{7\pi}{16}\right) = \lambda$  & if  $x^y + y^x = \lambda$ , then the value of  $(x + y)^2$  must be

यदि  $\tan^2\left(\frac{\pi}{16}\right) + \tan^2\left(\frac{2\pi}{16}\right) + \tan^2\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \dots + \tan^2\left(\frac{7\pi}{16}\right) = \lambda$  तथा यदि  $x^y + y^x = \lambda$ , तो  $(x + y)^2$  का मान है

- (A) 35
- (B) 1225
- (C) 225
- (D) 2

**Ans. B**

**Sol.**

$$\begin{aligned} \lambda &= \left\{ \tan^2\left(\frac{\pi}{16}\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{16}\right) \right\} \\ &+ \left\{ \tan^2\left(\frac{2\pi}{16}\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{6\pi}{16}\right) \right\} \\ &+ \left\{ \tan^2\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \cot^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{16}\right) \right\} + 1 \\ &= \left\{ \tan\left(\frac{\pi}{16}\right) + \cot\left(\frac{\pi}{16}\right) \right\}^2 \\ &+ \left\{ \tan\left(\frac{2\pi}{16}\right) + \cot\left(\frac{2\pi}{16}\right) \right\}^2 + \left\{ \tan\left(\frac{3\pi}{16}\right) + \cot\left(\frac{3\pi}{16}\right) \right\}^2 \\ &\quad - 2 - 2 - 2 + 1 \\ &= \frac{4}{\sin^2\frac{\pi}{8}} + \frac{4}{\sin^2\frac{\pi}{4}} + \frac{4}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)} - 5 = 35 \\ \therefore x^y + y^x &= 35 \\ \Rightarrow x = 3y, y = 1 \text{ or } x = 1, y = 3x \\ \therefore (x + y)^2 &= 35^2 = 1225 \end{aligned}$$

20. Let  $x = \sin 1^\circ$ , then the value of the expression

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \frac{1}{\cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 44^\circ \cdot \cos 45^\circ}$$

is equal to

यदि  $x = \sin 1^\circ$ , जो व्यंजक

$$\frac{1}{\cos 0^\circ \cdot \cos 1^\circ} + \frac{1}{\cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ} + \frac{1}{\cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 44^\circ \cdot \cos 45^\circ}$$

का मान है।

(A)  $x$

(B)  $\frac{1}{x}$

(C)  $\frac{\sqrt{2}}{x}$

(D)  $\frac{x}{\sqrt{2}}$

**Ans. B**

**Sol.**

$$\frac{1}{\sin 1^\circ} \left[ \frac{\sin(1^\circ - 0^\circ)}{\cos 0^\circ \cos 1^\circ} + \frac{\sin(2^\circ - 1^\circ)}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \frac{\sin(3^\circ - 2^\circ)}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ} + \dots + \frac{\sin(45^\circ - 44^\circ)}{\cos 44^\circ \cos 45^\circ} \right]$$

$$= \frac{1}{\sin 1^\circ} [\tan 1^\circ + (\tan 2^\circ - \tan 1^\circ) +$$

$$(\tan 3^\circ - \tan 2^\circ) + (\tan 4^\circ - \tan 3^\circ)$$

$$+ \dots + (\tan 45^\circ - \tan 44^\circ)]$$

$$= \frac{1}{\sin 1^\circ} = \frac{1}{x}$$

SECTION-II : (Maximum Marks: 20)

This section contains 10 questions Candidates have to attempt any 5 questions out of 10. If more than 5 questions are attempted, then only first 5 attempted questions will be evaluated.

The answer to each question is a Numerical Value.

For each question, enter the correct integer value (In case of non-integer value, the answer should be rounded off to the nearest Integer).

Answer to each question will be evaluated according to the following marking scheme:

Full Marks : +4 If correct answer is entered.

Zero Marks : 0 If the question is unanswered.

Negative Marks : -1 If wrong answer is entered.

खण्ड-II : (अधिकतम अंक: 20)

इस खंड में 10 प्रश्न हैं। उम्मीदवारों को 10 में से किसी भी 5 प्रश्न का प्रयास करना है। यदि 5 से अधिक प्रश्नों का प्रयास किया जाता है, तो केवल पहले 5 प्रश्नों का मूल्यांकन किया जाएगा।

प्रत्येक प्रश्न का उत्तर संख्यात्मक मान (Numerical Value) है।

प्रत्येक प्रश्न के लिए, सही पूर्णांक मान दर्ज करें (दशमलव संकेतन में, उत्तर को निकटतम पूर्णांक में लिखा जाना चाहिए।)

प्रत्येक प्रश्न के उत्तर का मूल्यांकन निम्नलिखित अंकन योजना के अनुसार किया जाएगा:

पूर्ण अंक : +4 यदि सही उत्तर दर्ज किया गया है।

शून्य अंक : 0 यदि कोई भी उत्तर दर्ज नहीं किया गया है।

ऋणात्मक अंक : -1 यदि गलत उत्तर दर्ज किया गया है।

1. If the function  $f$  given by  $f(x) = x^3 - 3(a - 2)x^2 + 3ax + 7$ , for some  $a \in \mathbb{R}$  is increasing in  $(0, 1]$  and decreasing in  $[1, 5)$ , then a root of the equation,  $\frac{f(x) - 14}{(x - 1)^2} = 0 (x \neq 1)$  is :

यदि फलन  $f(x) = x^3 - 3(a - 2)x^2 + 3ax + 7$  द्वारा दिया गया है किसी  $a \in \mathbb{R}$  के लिये अन्तराल  $(0, 1]$  में वर्द्धमान तथा

अन्तराल  $[1, 5)$  में ह्रासमान हो, तो समीकरण  $\frac{f(x) - 14}{(x - 1)^2} = 0 (x \neq 1)$  का मूल होगा :

Ans. 7

Sol.

$$f'(x) = 3x^2 - 6(a - 2)x + 3a$$

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0, 1]$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in [1, 5)$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \text{ at } x = 1 \Rightarrow a = 5$$

$$f(x) - 14 = (x - 1)^2 (x - 7)$$

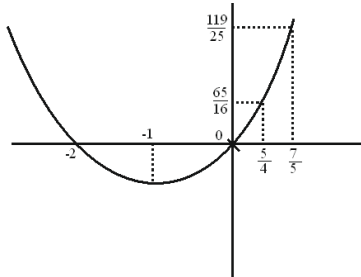
$$\frac{f(x) - 14}{(x - 1)^2} = x - 7$$

2. The sum of the maximum and minimum values of the function  $f(x) = |5x - 7| + [x^2 + 2x]$  is the interval  $\left[\frac{5}{4}, 2\right]$ , where  $[t]$  is the greatest integer  $\leq t$  is :

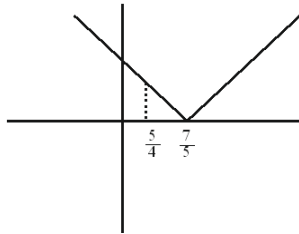
फलन  $f(x) = |5x - 7| + [x^2 + 2x]$  यहाँ  $[t]$  महत्तम पूर्णांक  $\leq t$  है, तो अंतराल  $\left[\frac{5}{4}, 2\right]$  में उच्चतम तथा निम्नतम मानों का योगफल है।

**Ans. 15**

**Sol.** Graph of  $x^2 + 2x$



Graph of  $|5x - 7|$



$$f(x)|_{\min} = 4 + 0 = 4, \text{ at } x = \frac{7}{5}$$

$$f(x)|_{\max} = 8 + 3 = 11, \text{ at } x = 2$$

$\therefore$  Required sum = 15

3. If 'R' is the least value of 'a' such that the function  $f(x) = x^2 + ax + 1$  is increasing on  $[1, 2]$  and 'S' is the greatest value of 'a' such that the function  $f(x) = x^2 + ax + 1$  is decreasing on  $[1, 2]$ , then the value of  $|R - S|$  is :

यदि 'a' का न्यूनतम मान, जिसके लिए फलन  $f(x) = x^2 + ax + 1$ , अंतराल  $[1, 2]$  पर वर्धमान है, 'R' है तथा 'a' का अधिकतम मान, जिसके लिए फलन  $f(x) = x^2 + ax + 1$  अंतराल  $[1, 2]$ , पर ह्रासमान है, तो  $|R - S|$  का मान है।

**Ans. 2**

**Sol.**  $f(x) = x^2 + ax + 1$

$$f'(x) = 2x + a$$

when  $f(x)$  is increasing on  $[1, 2]$

$$2x + a \geq 0 \quad \forall x \in [1, 2]$$

$$a \geq -2x \quad \forall x \in [1, 2]$$

$$R = -4$$

when  $f(x)$  is decreasing on  $[1, 2]$

$$2x + a \leq 0 \quad \forall x \in [1, 2]$$

$$a \leq -2 \quad \forall x \in [1, 2]$$

$$S = -2$$

$$|R - S| = |-4 + 2| = 2$$

4. If  $y^{1/4} + y^{-1/4} = 2x$ , and

$$(x^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0, \text{ then } |\alpha - \beta| \text{ is equal to } \underline{\hspace{2cm}}.$$

यदि  $y^{1/4} + y^{-1/4} = 2x$ , तथा

$$(x^2 - 1) \frac{d^2y}{dx^2} + \alpha x \frac{dy}{dx} + \beta y = 0, \text{ हैं, तो } |\alpha - \beta| \text{ बराबर है } \underline{\hspace{2cm}}।$$

**Ans. 17**

**Sol.**

$$y^{1/4} + \frac{1}{y^{1/4}} = 2x$$

$$\Rightarrow \left(y^{1/4}\right)^2 - 2xy^{(1/4)} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow y^{1/4} = x + \sqrt{x^2 - 1} \text{ or } x - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$\text{So, } \frac{1}{4} \frac{1}{y^{3/4}} \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \frac{1}{y^{3/4}} \frac{dy}{dx} = \frac{y^{1/4}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4y}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad \dots(1)$$

$$\text{Hence, } \frac{d^2y}{dx^2} = 4 \frac{(\sqrt{x^2 - 1}) y' - \frac{yx}{\sqrt{x^2 - 1}}}{x^2 - 1}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)y'' = 4 \frac{(x^2 - 1) y' - xy}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)y'' = 4 \left( \sqrt{x^2 - 1} y' - \frac{xy}{\sqrt{x^2 - 1}} \right)$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)y'' = 4 \left( 4y - \frac{xy'}{4} \right) \text{ (from I)}$$

$$\Rightarrow (x^2 - 1)y'' + xy' - 16y = 0$$

$$\text{So, } |\alpha - \beta| = 17$$

5. If  $y = \sum_{k=1}^6 k \cos^{-1} \left\{ \frac{3}{5} \cos kx - \frac{4}{5} \sin kx \right\}$ ,  
then  $\frac{dy}{dx}$  at  $x = 0$  is \_\_\_\_\_.

यदि  $y = \sum_{k=1}^6 k \cos^{-1} \left\{ \frac{3}{5} \cos kx - \frac{4}{5} \sin kx \right\}$ ,

तो  $x = 0$  पर  $\frac{dy}{dx}$  का मान है -

**Ans. 91**

**Sol.** Put  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$   $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Now  $\frac{3}{5} \cos kx - \frac{4}{5} \sin kx$

$= \cos \alpha \cdot \cos kx - \sin \alpha \cdot \sin kx$

$= \cos(\alpha + kx)$

As we have to find derivate at  $x = 0$

We have  $\cos^{-1}(\cos(\alpha + kx))$

$= (\alpha + kx)$

$\Rightarrow y = \sum_{k=1}^6 (\alpha + kx)$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \Big|_{\text{at } x=0} = \sum_{k=1}^6 k = \frac{6 \times 7 \times 13}{6} = 91$

6. If  $K = \frac{\cos^2 1^\circ - \cos^2 2^\circ}{2 \sin 3^\circ \sin 1^\circ}$ , then  $2K = ?$

यदि  $K = \frac{\cos^2 1^\circ - \cos^2 2^\circ}{2 \sin 3^\circ \sin 1^\circ}$  तब  $2K = ?$

**Ans. 1**

**Sol.**  $\frac{\cos^2 1^\circ - \cos^2 2^\circ}{2 \sin 3^\circ \sin 1^\circ} = \frac{\sin^2 2^\circ - \sin^2 1^\circ}{2 \sin 3^\circ \sin 1^\circ}$

$= \frac{\sin(2^\circ + 1^\circ) \sin(2^\circ - 1^\circ)}{2 \sin 3^\circ \sin 1^\circ} = \frac{1}{2}$

7. If  $\theta = \frac{\pi}{4n}$  then value of  $\tan\theta \tan 2\theta \dots \tan(2n-2)\theta \tan(2n-1)\theta$  is :-

यदि  $\theta = \frac{\pi}{4n}$  तब  $\tan\theta \tan 2\theta \dots \tan(2n-2)\theta \tan(2n-1)\theta$  का मान है :-

**Ans. 1**

**Sol.**  $\theta = \frac{\pi}{4n} \Rightarrow 4n\theta = \pi \Rightarrow 2n\theta = \frac{\pi}{2}$   
 $\tan\theta \tan 2\theta \dots \tan(2n-2)\theta \tan(2n-1)\theta$   
 $(\tan\theta \tan(2n-1)\theta) (\tan 2\theta \tan(2n-2)\theta) \dots \tan n\theta$   
 $\left(\tan\theta \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right) \left(\tan 2\theta \tan\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta\right)\right) \dots \tan \frac{\pi}{4}$   
 $1 \times 1 \times 1 \dots \times 1 = 1$

8. If  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = k \sec 2\theta$  then k is equal to :-  
 यदि  $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = k \sec 2\theta$  तब k बराबर है :-

**Ans. 2**

**Sol.**  $\frac{1 + \tan\theta}{1 - \tan\theta} + \frac{1 - \tan\theta}{1 + \tan\theta}$   
 $= \frac{2(1 + \tan^2\theta)}{1 - \tan^2\theta} = 2 \sec 2\theta$

9. Let  $f(x)$  be a cubic polynomial with  $f(1) = -10$ ,  $f(-1) = 6$ , and has a local minima at  $x = 1$ , and  $f'(x)$  has a local minima at  $x = -1$ . Then  $f(3)$  is equal to \_\_\_\_\_.

माना  $f(x)$  एक त्रिघातीय बहुपद है जिसके लिए

$f(1) = -10$ ,  $f(-1) = 6$  हैं, तथा  $f$  का एक स्थानीय निम्नतम बिंदु  $x = 1$  है और  $f'(x)$  का एक स्थानीय निम्नतम बिंदु  $x = -1$  है। तो  $f(3)$  बराबर है \_\_\_\_\_।

**Ans. 22**

10. Cosine of the angle of intersection of curves

$y = 3^{x-1} \log x$  and  $y = x^x - 1$  is

वक्र  $y = 3^{x-1} \log x$  तथा  $y = x^x - 1$  के प्रतिच्छेद कोण की कोज्या (cosine) बराबर है

**Ans. 1**

**Sol.**  $y = 3^{x-1} \ln x$  &  $y = x^x - 1$   
 Point of intersection (1, 0)  
 $y' = 3^{x-1} \ln 3 \ln x + \frac{3^{x-1}}{x} = 1 = m_1$   
 $y' = x^x(1 + \ln x) = 1 = m_2$   
 $\therefore \text{Angle} = 0 \therefore \cos 0 = 1$

